CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

IIIe. Volume.

N°. II. *Mai* 1815.

§. I. ANALYSE.

Des principes fondamentaux (*) *et des règles générales du calcul différentiel.* (Extrait des leçons d'Analyse de M. Poinsot) (**).

I.

Dans le calcul infinitésimal, on considère les grandeurs comme formées par l'addition successive de leurs parties homogènes. On peut nommer ces parties ou différences successives, les élémens de la grandeur; et leur somme recompose la grandeur même, puisque c'est en ces élémens qu'on l'avait soi-même décomposée. Cela est manifeste.

Mais comme ces élémens ne seraient pas plus faciles à traiter que les grandeurs elles-mêmes, on prend à leur place d'autres quantités voisines qui soient faciles à évaluer par les premiers principes de la geométrie et du calcul. Si ces quantités voisines, que nous nommerons *différentielles*, s'approchent beaucoup des différences ou élémens, le résultat s'approchera beaucoup de la vérité: c'est ce

(*) Le programme adopté, il y a deux ans, pour l'enseignement de l'Ecole Polytechnique, porte qu'on exposera les principes du calcul différentiel par la considération des infiniment petits, et qu'on fera voir dans les cas plus simples, l'accord de cette méthode avec celle des limites, ou du développement en série.

(**) Cet extrait et le suivant relatif au changement de la variable indépendante, doivent être regardés comme des notes rapides qu'on a jugé à propos d'imprimer ici en faveur des Élèves.

que l'on sent d'abord en général. Mais il y a plus : si les différentielles sont tellement choisies, que leurs dernières raisons avec les élémens soient la raison d'égalité, et si le problème dont on s'occupe ne dépend précisément que de ces dernières raisons, vous pourrez en toute rigueur substituer les différentielles aux élémens véritables que vous aviez dessein de considérer, et le calcul infinitésimal, qui ne se présentait d'abord que comme une méthode d'approximation, deviendra un calcul aussi rigoureux que l'algèbre.

II.

Nous devons donc poser d'abord ce premier principe du calcul infinitésimal, et que l'on peut nommer le principe de l'égalité des dernières raisons : *c'est qu'on ne doit jamais prendre, au lieu des différences ou élémens des grandeurs, que des quantités dont la dernière raison avec ces élément soit la raison d'égalité.*

Ainsi, on se conforme au principe, quand on prend dans le segment d'une aire plane, au lieu du trapèze curviligne qui est l'élément lui-même, le rectangle inscrit ou circonscrit; parce qu'il est manifeste que la dernière raison du rectangle au trapèze est la raison d'égalité.

Mais quoique les deux figures se confondent à la fin, ce serait violer le principe, que de prendre le petit côté du rectangle pour le petit côté adjacent du trapèze; parce que leur dernière raison n'étant pas l'unité, vous seriez conduit, par exemple, à cette erreur grossière, que la longueur de la courbe est égale à celle de l'abcisse qui lui correspond. Mais vous pourrez très-bien prendre pour le petit côté du trapèze ou pour la différentielle de l'arc, la corde qui le soustend; parce que la dernière raison de l'arc à la corde est la raison d'égalité.

Vous voyez de quelle importance est ce premier principe fondamental, et avec quel soin vous devez l'observer, puisque des choses qui paraissent se confondre dans l'infini, ne peuvent néanmoins être prises l'une pour l'autre à cette limite.

Un autre principe non moins important, est celui qu'on peut nommer le principe de l'homogénéité, et qui veut *que les différentielles, quelque petites qu'on les suppose, soient toujours de même nature que les grandeurs que l'on considère.* C'est à la vérité ce qu'on a sous-entendu dans le principe de l'égalité des dernières raisons : car on ne peut considérer le rapport de la différentielle à la différence, sans les supposer homogènes; et de son côté, la différence est une partie de la grandeur aussi homogène avec elle par hypothèse. Mais comme dans les applications de la méthode *des infiniment petits*, ce principe pourrait quelquefois nous échapper, je ne crois

pas inutile de le rappeler à votre esprit, et de vous le faire ici particulièrement remarquer.

Ainsi, la différentielle d'un solide que l'on suppose coupé en une suite de tranches par des plans parallèles équidistans, serait elle-même une tranche prismatique solide; la différentielle de cette tranche prise de la même manière, et la différentielle de cette seconde différentielle, seraient encore des solides. Et quoique les rapports du solide à la tranche, de la tranche à la colonne rhomboïdale, et de celle-ci au petit rhomboïde, puissent devenir infinis, auquel cas ces différentielles successives seraient des infiniment petits du 1^er^., du 2^e^. et du 3^e^. ordre; il n'en faudrait pas moins les considérer comme des solides parfaitement homogènes entre eux. Et de même, il faudra toujours regarder la différentielle d'une surface, comme une surface; et celle d'une ligne, comme une ligne.

Mais on violerait le principe de l'homogénéité, en regardant un solide comme composé d'un nombre infini de surfaces; la surface, comme composée d'une infinité de lignes; et la ligne, d'une infinité de points. Par là, on pourrait également tomber dans des erreurs grossières; et si on les évite dans la méthode des *indivisibles* de *Cavallieri*, c'est qu'on fait une supposition tacite conforme au principe précédent. Ainsi, par cette méthode, si deux triangles de même base et de même hauteur sont égaux, ce n'est point parce qu'ils sont composés d'un même nombre de lignes égales et parallèles, mais parce qu'on y peut tracer le même nombre de ces lignes égales *toutes équidistantes*; de sorte qu'on a tacitement égard à la commune largeur des lignes ou plutôt des zônes qu'on imagine dans les deux triangles que l'on considère.

III.

Tels sont les deux principes fondamentaux du calcul infinitésimal : ils renferment la définition rigoureuse de ce que l'on nomme une différentielle. *La différentielle est une partie de la différence, mais dont la dernière raison avec cette différence est l'unité*; et dans toutes les applications à la géométrie, à la mécanique et à la physique, il ne faut jamais perdre de vue que les différentielles doivent être homogènes avec les grandeurs mêmes que l'on considère, comme cela résulte évidemment de la nature des choses.

La partie du calcul infinitésimal, qui apprend à trouver ces différentielles dont la dernière raison avec les différences est la raison d'égalité, s'appelle *le calcul différentiel*. L'autre partie qui apprend à trouver la somme de ce nombre infini de différentielles, s'appelle *le calcul intégral*; c'est l'inverse du calcul différentiel; et l'objet de ces calculs est la solution de tous les problêmes qui ne dépendent que des dernières raisons.

IV.

Mais puisque, par la définition même des différentielles, le calcul ne peut être exact que dans les problêmes qui dépendent de leurs dernières raisons, et non pas de ces quantités mêmes, il semble qu'on ne devrait exprimer par aucun nom, ni marquer par aucun signe ces différentielles qui n'existent pas; mais qu'il faudrait uniquement représenter les limites de leurs rapports, ou ces dernières raisons qui nous occupent, et qui seules demeurent quand les différentielles s'évanouissent. On conserverait par là, et dans le langage, et dans les signes, la rigueur même qui est dans nos conceptions. C'est en effet ce que l'on peut facilement obtenir, comme on le voit dans le calcul des *fluxions* de Newton, et dans la théorie des *fonctions dérivées* de M. de Lagrange. Car les fluxions des quantités variables, ou les vîtesses avec lesquelles ces quantités sont supposées croître et se former à chaque instant, ne sont autre chose que les dernières raisons de leurs accroissemens à l'accroissement de la variable uniforme, dont elles sont regardées comme des fonctions; et il en est de même des *fonctions dérivées* qui sont les *fluxions successives* les unes des autres. Mais ce premier artifice qui traite en apparence les différentielles comme de véritables quantités, est aussi sûr que ces méthodes, et il est bien plus commode dans les applications à la géométrie et à la mécanique. Le calcul a au fond les mêmes principes, et dans le langage on rappele tout à la même exactitude, en nommant ces différentielles et ces élémens, *des infiniment petits;* ce qui fait souvenir qu'on ne doit regarder à la fin que les limites de leurs rapports; ou s'il s'agit de la somme des différentielles, qu'on ne doit également regarder que la *limite* vers laquelle cette somme converge à mesure que les différentielles diminuent. Car je remarque que ces sommes de différentielles ont des limites aussi bien que les rapports dont on vient de parler : si chaque différentielle diminue sans cesse, d'un autre côté leur nombre augmente, et la somme de ces quantités, dont chacune tend à s'évanouir, a pourtant une limite existante qui est la somme des élémens eux-mêmes, et qui se confond rigoureusement avec la grandeur que l'on voulait trouver.

Ainsi, l'on revient toujours d'une manière naturelle au calcul de ces infiniment petits, dont on cherche les rapports, s'il faut mesurer les affections des grandeurs qui varient par nuances insensibles, ou qu'on prend en nombre infini, s'il s'agit de mesurer ces grandeurs elles-mêmes. Cette méthode est la plus directe et la plus féconde, parce qu'elle est la plus conforme à l'idée qu'on se fait naturellement de la génération des grandeurs.

V.

Il reste donc maintenant à établir les règles du calcul infinitésimal, et d'abord celles du calcul différentiel, qui apprennent à trouver la différentielle de toute fonction d'une variable; ce qui s'appelle *différentier*.

Ces règles générales nous sont bien connues, et elles ne laissent absolument rien à desirer, comme nous le verrons tout à l'heure. Mais auparavant, il convient d'établir un point important sur l'expression générale de la différentielle d'une fonction.

VI.

La différentielle d'une fonction quelconque y de x peut toujours être prise de la forme Xdx, X étant une fonction finie de x, et dx désignant la différentielle de la variable x. De sorte que toutes les règles du calcul différentiel en lui-même se réduisent à trouver cette fonction X, qu'on peut nommer *la fonction différentielle.*

Considerez, en effet, une quantité y qui dépende continuellement d'une autre x par une loi quelconque; y sera ce qu'on appelle une fonction de x, et cette fonction variera d'une manière continue en même tems que x, sans quoi elle ne dépendrait pas continuellement de x, comme on le suppose, et n'en serait point une fonction.

Si donc x change et s'augmente de la différence Δx, y changera aussi et s'augmentera ou diminuera d'une certaine quantité que je nommerai Δy; et l'on pourra considérer le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de l'accroissement de la fonction à celui de la variable. Si Δx diminue, Δy diminuera aussi, puisque ces deux quantités sont nulles en même tems, et qu'elles changent d'une manière continue. Mais quoique Δx et Δy diminuent ensemble et s'évanouissent à-la-fois, leur rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ peut bien ne pas diminuer jusqu'à zéro, ni croître jusqu'à l'infini, mais tendre sans cesse vers une valeur finie et qui en sera la limite. On en peut voir une foule d'exemples: ainsi la fonction y étant, je suppose x^2, la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sera $2x$; si la fonction était x^m, la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ serait mx^{m-1}; pour $y = \sin x$, il est aisé de prouver qu'elle est $\cos x$; etc. On peut

même dire que, le rapport de deux choses homogènes ne dépendant ni de leur nature ni de leurs grandeurs absolues, par la définition même du rapport, la quantité $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a toujours une limite; et c'est ce que la considération d'une courbe et de sa tangente dont l'existence n'est pas douteuse, fait voir d'ailleurs avec la dernière évidence.

Ainsi, y étant une fonction quelconque de x, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de l'accroissement de la fonction y, à l'accroissement simultanée de la variable x, a une limite qui ne dépend plus que de x, et qui est ainsi une fonction nouvelle de x. En désignant donc cette fonction par X, on aurait : limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x} = X$. Or, il est permis de supposer que la différence Δy est égale à $X\Delta x$, plus une certaine fonction de x et Δx, que je désigne par $\varphi(x, \Delta x)$; ainsi on aura $\Delta y = X\Delta x + \varphi(x, \Delta x)$. Mais d'après ce que nous avons dit, il suffirait de prendre pour différentielle, la première partie $X\Delta x$, si la dernière raison de $X\Delta x$ à la différence entière $X\Delta x + \varphi(x, \Delta x)$ était l'unité. Prenant donc le rapport, et divisant de part et d'autre par Δx, on trouve:

$$\frac{X\Delta x + \varphi(x, \Delta x)}{X\Delta x} = \frac{X + \frac{\varphi(x, \Delta x)}{\Delta x}}{X} = 1 + \frac{\varphi(x, \Delta x)}{X\Delta x}.$$

Mais la quantité $\frac{\varphi(x, \Delta x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} - X$ est nulle à la limite zéro de Δx, sans quoi X ne représenterait pas la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ contre l'hypothèse. On a donc à la limite de Δx, le rapport de la partie $X\Delta x$ à la différence $X\Delta x + \varphi(x, \Delta x)$ égal à l'unité. Donc on peut prendre $X\Delta x$ pour l'expression de la différentielle de y; et changeant la caractéristique Δ en d, pour marquer qu'on passe aux différentielles, on aura $dy = Xdx$; ce qu'il fallait démontrer.

Il ne s'agit donc actuellement que de voir comment on peut trouver ce coefficient différentiel X pour toutes les fonctions; et c'est ce que nous pouvons réduire aux trois règles suivantes que j'exprimerai sur-le-champ dans ce tableau.

VII.

Règles du calcul différentiel.

Soit $y = fx$, équation où y est vu directement comme fonction de x, on aura cette *première règle:*

$$\text{I. } \frac{dy}{dx} = \frac{f(x+\Delta x)-fx}{\Delta x}, \text{ à la limite (o) de } \Delta x, = \frac{dy}{dx}.$$

Soit $y = f(p)$ (p étant fonction de x), on aura cette *seconde règle:*

$$\text{II. } \frac{dy}{dx} = \frac{f(p+\Delta p)-fp}{\Delta x}, \text{ à la limite (o) de } \Delta x, = \frac{dy}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}.$$

Soit $y = f(p, q)$ (p et q étant deux fonctions de x), on aura cette *troisième règle:*

$$\text{III. } \frac{dy}{dx} = \frac{f(p+\Delta p, q+\Delta q)-f(p,q)}{\Delta x}, \text{ à la limite (o) de } \Delta x, = \frac{dy}{dp}\cdot\frac{dp}{dx} + \frac{dy}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}.$$

La *première règle* n'est au fond que la définition du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, et ne donne évidemment aucun moyen de le découvrir, à moins qu'on ne particularise la fonction fx.

Mais la *seconde règle* fait voir que, si l'on savait différentier une fonction simple, on saurait aussi différentier une fonction de fonction. Elle se démontre facilement en mettant l'expression $\frac{f(p+\Delta p)-fp}{\Delta x}$ sous la forme $\frac{f(p+\Delta p)-fp}{\Delta p} \times \frac{\Delta p}{\Delta x}$, qui, à la limite, devient, en vertu de la première règle: $\frac{dy}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}$.

Ainsi, pour différentier une fonction de p, p étant une fonction de x, il faut différentier la fonction par rapport à p, considérée comme une simple variable, puis différentier p par rapport à x, et multiplier ces coefficiens différentiels.

Et si l'on avait $y = f(P)$, P étant fonction de p qui est fonction de x, on aurait d'abord: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dP}\cdot\frac{dP}{dx}$; mais $\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}$, et par conséquent $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dP}\cdot\frac{dP}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}$, et ainsi de suite.

La *troisième règle* apprend que pour différentier une fonction

de deux fonctions p et q de x, il faut différentier successivement par rapport à chacune d'elles, considérée comme seule variable, et ajouter ces fonctions différentielles.

Cette règle peut se démontrer assez facilement de cette manière :

Supposez que, dans la fonction proposée qui est $y=f(p,q)$, p croisse seule d'abord de Δp, par la substitution de $x+\Delta x$ à la place de x, dans cette fonction seule ; y deviendra $y_{,}=f(p+\Delta p, q)$: et si à présent q seule croît de même à son tour de Δq, $y_{,}$ deviendra $y_{,,}=f(p+\Delta p, q+\Delta q)$, et l'on aura le même résultat que si l'on avait augmenté en même tems p et q, des accroissemens simultanés Δp et Δq, dus à l'accroissement Δx de x dans les deux fonctions p et q.

Mais au lieu de prendre tout d'un coup la différence de y à $y_{,,}$, il est évident qu'on peut prendre d'abord la différence de y à $y_{,}$, prendre ensuite celle de $y_{,}$ à $y_{,,}$, et ajouter ces deux différences. On aura donc: $y_{,,}-y$ ou $\Delta y=(y_{,}-y)+(y_{,,}-y_{,})$, et divisant par Δx, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_{,}-y}{\Delta x}+\frac{y_{,,}-y_{,}}{\Delta x}$, c'est-à-dire,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(p+\Delta p,q)-f(p,q)}{\Delta x}+\frac{f(p+\Delta p,q+\Delta q)-f(p+\Delta p,q)}{\Delta x};$$

or, à la limite de Δx, la première partie du second membre est, par la seconde règle, $\frac{dy}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}$. Pour trouver la limite de la deuxième partie $\frac{f(p+\Delta p, q+\Delta q)-f(p+\Delta p, q)}{\Delta x}$, imaginez qu'on ne fasse d'abord Δx nul que dans Δq; cette partie deviendrait, par la même règle, $\frac{dy_{,}}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}$; mais $\frac{dy_{,}}{dq}$ n'est autre chose que la fonction $\frac{dy}{dq}$ où l'on mettrait au lieu de p, $p+\Delta p$; donc puisque Δp s'évanouit aussi en même tems que Δx, $\frac{dy_{,}}{dq}$ à la limite de Δx se réduit à $\frac{dy}{dq}$, et l'on a enfin :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}+\frac{dy}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}.$$

On trouverait de même pour une fonction de trois fonctions

p, q, r, représentée par $y = f(p, q, r)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dp}\cdot\frac{dp}{dx} + \frac{dy}{dq}\cdot\frac{dq}{dx} + \frac{dy}{dr}\cdot\frac{dr}{dx},$$

et ainsi de suite.

D'où l'on voit que la troisième règle s'étend à un nombre quelconque de fonctions p, q, r, etc., qui pourraient se trouver sous la fonction que l'on considère.

VIII.

Telles sont les règles générales au moyen desquelles on peut différentier une fonction quelconque d'une ou de plusieurs autres fonctions, si l'on sait différentier les fonctions simples dont elle se compose.

Ainsi tout se réduit à savoir différentier les fonctions que l'on regarde comme simples, et dont on fait usage dans l'analyse. Or, la première règle,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - fx}{\Delta x} \text{ (à la limite de } \Delta x\text{)},$$

ne peut rien donner sous cette forme générale, puisqu'en faisant Δx nul, l'expression $\frac{f(x + \Delta x) - fx}{\Delta x}$ devient $\frac{0}{0}$, ce qui n'apprend rien: il faudrait donc avant tout transformer cette expression de manière qu'elle ne se réduisît pas à $\frac{0}{0}$. La seule transformation générale qu'on puisse indiquer est de développer $f(x + \Delta x)$ en série, suivant les puissances de Δx; ce qui donnera :

$$f(x + \Delta x) = fx + X\Delta x + X_{,}\Delta x^2 + X_{,,}\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Retranchant fx, divisant par Δx et faisant ensuite $\Delta x = 0$, on aura :

$$\frac{dy}{dx} = X.$$

Ainsi la fonction différentielle $\frac{dy}{dx}$ sera le coefficient de la première puissance de Δx dans le développement de $f(x + \Delta x)$. Or, on connaît ces développemens pour les fonctions x^m, a^x,

$\log x$, $\sin x$, $\cos x$, etc., et par conséquent on peut trouver par cette voie les différentielles de toutes ces fonctions simples.

IX.

Mais pour ne rien emprunter d'étranger à notre calcul, j'observe que les règles générales données plus haut suffisent, même pour différentier ces fonctions que nous regardons comme simples; de sorte que par ces règles, on saura différentier non-seulement les fonctions composées, mais encore toutes les fonctions simples, si l'on sait seulement différentier la plus simple de toutes qui est la variable, même x que l'on considère, et dont la différentielle est évidemment dx, et le coefficient $\frac{dy}{dx}$ l'unité.

Soit, par exemple, $y = x^m$ la fonction qu'il s'agit de différentier; la nature de la fonction x^m donne cette identité :

$$(ax)^m = a^m . x^m,$$

qui a lieu quelles que soient a, x et m, et qui est une définition de ce genre de fonctions qu'on appelle *puissances*.

Si donc on suppose que $y = x^m$ donne $\frac{dy}{dx} = \varphi x$, φx étant une certaine fonction inconnue qu'il s'agit de découvrir, l'identité $(ax)^m = a^m . x^m$ donnera de même (règle 2 et hypoth.) :

$$\varphi (ax)\, a = a^m \varphi x ;$$

d'où l'on tire, en divisant de part et d'autre par $a^m x^{m-1}$:

$$\frac{\varphi x}{x^{m-1}} = \frac{\varphi (ax)}{(ax)^{m-1}} ;$$

or, le premier membre est tout-à-fait indépendant de a : donc le second doit l'être aussi. Mais ce second membre est une fonction du produit ax : donc s'il est indépendant de a, il l'est nécessairement de x; donc $\frac{\varphi (ax)}{(ax)^{m-1}}$ est une constante K qui ne peut dépendre que de l'exposant m, et qu'on peut désigner par fm, et l'on aura :

$$\frac{\varphi x}{x^{m-1}} = K = fm, \quad \text{d'où} \quad \varphi x = fm . x^{m-1}.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la constante fm.

Pour cela, je considère l'identité $x^{m+n} = x^m \times x^n$, et j'ai, en différentiant et divisant ensuite par x^{m+n-1}, l'équation

$$fm + fn = f(m+n).$$

Ainsi la fonction marquée par fm est de telle nature, que la somme des fonctions est la fonction de la somme.

On aurait de même $fm + fn + fp + \text{etc.} = f(m+n+p+\text{etc.})$; et faisant m, n, p, etc. égaux entre eux et à m,

$$efm = f(me),$$

équation où m est une quantité quelconque, et e un nombre entier tel qu'on voudra.

Mais quoique e y soit entendu comme un entier, il n'en résulte pas moins que cette équation peut être considérée comme une identité en m et e, où l'on peut certainement permuter les lettres m et e, puisqu'on peut le faire dans le second membre $f(me)$, sans en changer la valeur.

Ainsi l'on a : $$efm = mfe.$$

Pour obtenir fm, il suffit donc d'avoir fe pour quelque cas particulier où cette fonction serait connue d'ailleurs : or dans le cas de $e = 1$, on a $fe = 1$; car $y = x^1$ donnerait $\frac{dy}{dx} = f(1)x^0 = f(1)$; mais d'un autre côté, par la 1re. règle, on aurait :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x + \Delta x - x)}{\Delta x} = 1 :$$

donc $f(1) = 1$, et l'équation $efm = mfe$ nous donne ainsi $fm = m$, quelque soit l'exposant m.

Ainsi l'on trouve pour la fonction $y = x^m$:

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \text{ou} \quad dy = mx^{m-1}.dx,$$

quelle que soit m.

Si l'on craignait quelque difficulté sur la manière dont on établit l'équation $efm = mfe$, on pourrait ne considérer d'abord que le cas de m entier, où cette équation est manifeste, et l'on en tirerait comme ci-dessus $fm = m$. Après quoi faisant $me = q$, dans la précédente $efm = fme$ qui a lieu quelle que soit m, on aurait

le cas de m fractionnaire ; enfin faisant $n = -m$ dans l'équation fondamentale $fm + fn = f(m + n)$, qui a lieu quelles que soient m et n, on aurait le cas de m négatif ; et l'on démontrerait successivement le théorême dans ces trois cas sans rencontrer la moindre difficulté.

Mais je passe aux exponentielles.

Soit donc $y = a^x$ et $\frac{dy}{dx} = \varphi x$, φx étant une certaine fonction de x qu'il faut découvrir par la nature de la fonction exponentielle a^x. Cette fonction a^x est définie, par exemple, dans cette identité :

$$(a^x)^m = a^{mx},$$

qui a lieu quelle que soit m.

Différentiant par les règles précédentes, et divisant ensuite par $m\,(a^x)^m$, on trouve :

$$\frac{\varphi x}{a^x} = \frac{\varphi\,(mx)}{a^{mx}}.$$

Or, le premier membre est tout-à-fait indépendant de m : donc le second doit l'être aussi ; mais ce second membre est une fonction du produit mx : donc s'il ne dépend pas de m, il ne peut non plus dépendre de x ; et $\frac{\varphi\,(mx)}{a^{mx}}$ est une constante K qui ne peut plus dépendre que de la base a de l'exponentielle a^x. Ainsi $\varphi x = Ka^x$, et l'on a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(a^x)}{dx} = Ka^x.$$

On pourrait chercher comme ci-dessus la nature de la fonction fa qui représente la constante K, et l'on trouverait facilement cette propriété :

$$fa + fb = f(ab)\,;$$

d'où l'on voit que fa est de la nature des logarithmes, et peut être représentée par $c \log a$, c étant une constante qui ne dépend plus que du systême de logarithmes que l'on voudrait choisir. Mais il est plus simple de ne considérer d'abord que l'exponentielle e^x, où e représente la base des logarithmes de Néper, et d'y réduire ensuite les autres exponentielles.

Pour $y = e^x$, on aurait donc :

$$\frac{dy}{dx} = Ke^x, \quad \text{d'où} \quad K = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)}{y}:$$

or quand $x = 0$, $y = 1$, et par conséquent $K = \frac{dy}{dx}$, quand $x = 0$. Mais la base e des logarithmes de Néper est telle que la première raison de l'accroissement Δy du nombre à l'accroissement Δx du logarithme, est l'unité à l'origine des logarithmes. Ainsi $\frac{dy}{dx}$ est 1, quand $x = 0$, et l'on a $K = 1$ dans le systême de Néper ; on a donc :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^x)}{dx} = e^x.$$

Actuellement a^x peut être changée en e^{xla} : donc en différentiant, $\frac{d(a^x)}{dx} = e^{xla}.la = a^x.la$. Et la constante la n'est autre chose que le logarithme même de la base a, dans le systême des logarithmes naturels.

X.

On pourrait aller plus loin et varier les démonstrations ; mais ces exemples suffisent : et d'ailleurs, par la conversion mutuelle des sinus et des exponentielles, toutes les fonctions que l'on considère en analyse peuvent se réduire aux deux fonctions x^m et a^x. Quant aux fonctions inverses, log x, arc sin $= x$, etc., leurs différentielles, par la seule application de la seconde règle, se déduiront des précédentes sans aucune difficulté.

Ainsi le calcul différentiel est compris en entier dans les trois règles générales que nous avons données. La première est la définition même de la *fonction différentielle*, et les deux autres sont l'expression des lois par lesquelles la différentielle d'une fonction composée de plusieurs autres, se compose des différentielles relatives à chacune d'elles. Ces lois sont, comme on voit, très-simples, et il est bien digne de remarque qu'elles soient semblables à celles de la composition des forces ou des mouvemens dans l'espace.

Sur le changement de la variable indépendante, ou transformation des fonctions différentielles.
(Extrait des leçons d'analyse de M. Poinsot.)

I.

Soit y une fonction quelconque de x, $y=fx$; on aura, comme on l'a vu, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., pour les coefficiens différentiels de y par rapport à x. Mais si l'on imagine que x devienne fonction d'une troisième variable t (auquel cas y devient aussi fonction de t), et qu'on prenne les coefficiens différentiels de y par rapport à t, on aura, par le principe de la différentiation d'une fonction de fonction (2^e. *régle*) :

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt},\quad \text{d'où}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

ce qui donne ce théorême :

Le coefficient différentiel d'une fonction y de x pris relativement à x, est égal au rapport des coefficiens différentiels de y et x, pris relativement à la variable t, dont on les suppose toutes deux devenues fonctions.

On aurait donc de même, en désignant pour un moment $\frac{dy}{dx}$ par p : $\frac{dp}{dx}=\frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, ou en mettant pour p sa valeur, et développant les différentiations

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3},$$

et ainsi de suite.

Ainsi l'on a ces formules fondamentales :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\frac{dx}{dt}.\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}.\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}, \\
\frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{dx}{dt}.\frac{d^2x}{dt^2}.\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \frac{dx}{dt}.\frac{dy}{dt}.\frac{d^3x}{dt^3}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}, \\
&\text{etc....}
\end{aligned}\right\} (A)$$

dont la loi est uniforme, puisque chacune d'elles se déduit de la précédente en la différentiant par rapport à t, et divisant ensuite par $\frac{dx}{dt}$.

II.

Ces formules serviront à transformer toute expression différentielle en x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., en une autre qui renfermerait à-la-fois les coefficiens différentiels de x et y, mais pris relativement à une troisième variable t dont on les supposerait fonctions.

La fonction φt que l'on suppose au lieu de la variable x, est tout-à-fait arbitraire ; mais quand elle est choisie, y devient nécessairement une fonction déterminée de t, qui est $y = f(\varphi t)$, afin que par l'élimination de t entre les deux équations $x = \varphi t$ et $y = f(\varphi t)$, on retrouve $y = f(x)$ qui est l'équation proposée.

III.

Si l'on supposait simplement $x = t$, on aurait :

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^3x}{dt^3} = 0, \text{ etc.},$$

et les formules précédentes (A) redeviendraient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ etc.},$$

comme cela doit être.

Mais si l'on suppose x une telle fonction de t qu'il en résulte pour y, $y = t$, alors on a : $\frac{dy}{dt} = 1$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, etc., et les formules (A) deviennent :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}, \text{ etc.}$$

Ce sont les formules nécessaires pour passer des coefficiens différentiels de y relatifs à x, aux coefficiens différentiels de x relatifs à y, ou des coefficiens differentiels d'une fonction aux coefficiens différentiels de la fonction inverse.

Sachant, par exemple, que $y = \sin x$ donne $\frac{dy}{dx} = \cos x$, en transformant $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, on en conclut tout de suite :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos x}, \quad \frac{d(\text{arc} \sin = y)}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

IV.

Si l'on suppose, en général, pour x une telle fonction de t qu'il en résulte $t = \psi(x, y)$, ψ désignant une fonction donnée, on aura :

$$1 = \frac{d\psi}{dx}.\frac{dx}{dt} + \frac{d\psi}{dy}.\frac{dy}{dt},$$

$$0 = \frac{d^2\psi}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{d\psi}{dx}.\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{d\psi}{dy}.\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{d^2\psi}{dxdy}.\frac{dx}{dt}\,\frac{dy}{dt}.$$

$$0 = \text{etc.}$$

Et au moyen de ces différentes équations, on éliminera des formules générales (A), $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc., ou $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, etc., ce qui leur donnera une forme particulière relative à la fonction $\psi(x, y)$ que l'on aura choisie pour t.

On voit même que pour chasser $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc., ou $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, etc., il n'est pas nécessaire de connaître la fonction $\psi(x, y)$ que l'on prend pour variable indépendante t; mais qu'il suffirait d'avoir son coefficient différentiel relatif à t. Ainsi je suppose que $\psi(x, y)$ soit la fonction inconnue de x et de y qui représente l'arc s de la courbe, dont $y = fx$ est l'équation.

On a vu que $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, et par conséquent, on aura :

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

Donc en faisant $s = t$, comme on le suppose ici, on aura :

$$1 = \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}},$$

ou bien :
$$1 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

et différentiant :
$$0 = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2},$$
$$0 = \text{etc.}$$

Au moyen de quoi on chassera des formules (A) les coefficiens $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc., ou $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, ce qui donnera, en remettant s au lieu de t, pour mieux rappeler que t doit être l'arc même de la courbe :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\left(1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right)^2}, \text{ etc.};$$

ou bien $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{dx}{ds}\right)^2}}{\frac{dx}{ds}}$, etc.

V.

Si l'on prend $t =$ arc sin $= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$ arc cos $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, on en tirera de même des équations au moyen desquelles on pourra éliminer des formules générales, les coefficiens différentiels de x ou de y relativement à t, ce qui leur donnera une forme particuliere relative à cette hypothèse.

Si l'on fait $t = \varphi =$ arc sin $= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, et en même tems $\sqrt{x^2+y^2} = r$; on aura $y = r \sin\varphi$, $x = r\cos\varphi$, et l'on en tirera les valeurs $\frac{dx}{d\varphi}$, $\frac{dy}{d\varphi}$, $\frac{d^2x}{d\varphi^2}$, $\frac{d^2y}{d\varphi^2}$, etc., en $\frac{dr}{d\varphi}$, $\frac{d^2r}{d\varphi^2}$, etc., et substituant dans les formules générales (A), on aura les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., transformés en coefficiens différentiels du rayon vecteur r (mené de l'origine comme foyer), par rapport à l'angle φ que forme ce rayon vecteur avec l'axe des abscisses.

VI.

On peut appliquer ces formules aux différentes expressions des sous-tangentes, sous-normales, à celle du rayon de courbure, et en général à toutes les expressions ou équations différentielles qui pourraient s'offrir.

Par exemple, le rayon de courbure R est, en fonction différentielle de l'ordonnée y relativement à l'abscisse x:

$$R = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Si l'on regarde x et y comme fonctions d'une troisième variable quelconque t, cette expression devient:

$$R = \frac{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{dt}.\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}.\frac{d^2x}{dt^2}}.$$

Si l'on y suppose $x = t$, elle redonne la première. Si l'on fait $y = t$, elle donne celle-ci :

$$R = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{-\frac{d^2x}{dy^2}},$$

qui ne diffère de la première que par le changement de x en y, et par le signe ; elle diffère par le signe, parce que la courbe ne peut être concave vers x sans être convexe vers y, et réciproquement.

Si l'on suppose $t = s =$ la fonction de x et y qui mesure l'arc s de la courbe proposée, la formule devient :

$$R = \frac{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right)}}{\frac{d^2y}{ds^2}},$$

et cette expression sera la plus commode dans le cas où l'équation de la courbe serait immédiatement donnée entre l'ordonnée et l'arc. Soit, par exemple, un cercle dont s est l'arc, y l'ordonnée, a le rayon ; on a :

$$y = a \sin\left(\frac{s}{a}\right); \text{ d'où } \frac{dy}{ds} = \cos\left(\frac{s}{a}\right), \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{a}\sin\left(\frac{s}{a}\right),$$

et

$$R = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{s}{a}\right)}}{\frac{1}{a}\sin\left(\frac{s}{a}\right)} = a = \text{au rayon.}$$

Soit encore l'équation $\sqrt{2a(2a - y)} = 4a - s$, qui appartient à une cycloïde, dont y serait l'ordonnée perpendiculaire à la base, s l'arc correspondant qui commence avec y, a étant le diamètre du cercle générateur ; on aura :

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 - \frac{y}{2a}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{4a} \quad \text{et} \quad R = 2\sqrt{2ay},$$

ainsi le rayon courbure est double de la corde menée du point décrivant au point de contact du cercle générateur avec la base.

VII.

Enfin si dans l'expression générale du rayon de courbure, vous faites $t = r = \sqrt{x^2+y^2}$, vous pourrez mettre cette formule en $\frac{dy}{dr}$, $\frac{d^2y}{dr^2}$, ou bien en $\frac{dx}{dr}$, $\frac{d^2x}{dr^2}$, selon que vous voudrez éliminer les coefficiens différentiels de x ou de y, relativement à cette troisième variable r; et vous auriez le rayon de courbure par l'ordonnée et le rayon vecteur r. Vous pourriez ensuite regarder y et r comme fonction d'une troisième variable, et remettre la formule d'une manière générale en :

$$\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{dr}{dt}, \quad \frac{d^2r}{dt^2};$$

faire ensuite $t = \varphi = \text{arc sin } \frac{y}{r}$, et chasser $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, et vous auriez le rayon de courbure en :

$$r, \quad \frac{dr}{d\varphi}, \quad \frac{d^2r}{d\varphi^2};$$

mais vous pouvez éviter cette double transformation pour passer aux coordonnées polaires r et φ, en posant tout de suite, comme on l'a fait ci-dessus :

$$y = r \sin \varphi, \qquad \text{et} \qquad x = r \cos \varphi;$$

d'où en tirant les fonctions,

$$\frac{dy}{d\varphi}, \quad \frac{d^2y}{d\varphi^2}, \quad \frac{dx}{d\varphi}, \quad \frac{d^2x}{d\varphi^2},$$

et substituant dans l'expression générale (VI), après y avoir changé t en φ; vous aurez :

$$R = \frac{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r.\frac{d^2r}{d\varphi^2}}.$$

On considère encore l'angle ω que la tangente de la courbe fait avec le rayon vecteur, et qui est égal à l'angle formé par cette tangente avec l'axe des abscisses, moins l'angle formé par le rayon vecteur avec le même axe. Or, le premier de ces angles a pour tangente : $\frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}$; le second, $\frac{y}{x}$; et vous trouverez que la tangente

de la différence ω, sera en coordonnées polaires r et φ :

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}.$$

Ces formules seront utiles pour un grand nombre de courbes, dont l'équation est très-simple en coordonnées polaires, et entre autres pour les spirales.

Soit, par exemple, la spirale logarithmique, dont l'équation est, $r = a^{\varphi}$; on trouve pour la tangente de l'inclinaison ω de cette courbe sur le rayon vecteur r, $\operatorname{tang} \omega = \frac{1}{la}$, la étant le logarithme hyperbolique de a. Ainsi la spirale logarithmique est une courbe qui est toujours également inclinée sur le rayon vecteur.

Pour le rayon de courbure, on trouve, en substituant les valeurs de $\frac{dr}{d\varphi}$, $\frac{d^2r}{d\varphi}$, dans la formule précédente :

$$R = r\sqrt{1 + (la)^2}.$$

Ce qui fait voir que la courbure est en raison inverse du rayon vecteur.

Si a est la base e des logarithmes de Néper, $le = 1$. Le rayon de courbure devient $r\sqrt{2}$, et la tangente de ω est égale à l'unité.

VIII.

Ce qu'on vient de dire dans cet extrait renferme la théorie de la transformation des fonctions différentielles, ou du changement de la *variable indépendante*. Dans le calcul des fluxions, ce serait le changement de la variable *uniforme*, ou dont la fluxion est prise pour unité. Dans le système des infiniment petits de Leibnitz, c'est le changement de la variable dont la différentielle est regardée comme *constante*. Mais ces diverses dénominations ne repondent, comme on voit, qu'aux divers points de vue sous lesquels on peut envisager le calcul différentiel ; et toute cette théorie n'est qu'une application continuelle de la seconde règle générale de ce calcul ; comme le Calcul différentiel relatif aux fonctions de plusieurs variables *indépendantes*, n'est qu'une application de la troisième règle, où l'on différentie toujours comme si les variables étaient fonctions d'une seule, mais où l'on ne perd jamais de vue qu'elles en sont des fonctions tout-à-fait *arbitraires*, ce qui laisse ces variables dans l'état d'indépendance où elles étaient supposées.

Analyse appliquée à la géométrie;
par M. HACHETTE.

Les questions d'analyse appliquée à la géométrie, dont on fait le plus souvent usage dans la mécanique, et les seules qui soient indispensables pour étudier cette science, sont relatives aux courbures des surfaces et des lignes.

J'ai réuni dans cet article les propositions démontrées par Euler, Monge et Meusnier. J'y ai ajouté des extraits de deux Mémoires qui ont été publiés par MM. Dupin et Lancret, anciens élèves de l'Ecole Polytechnique, l'un de M. Dupin, sur les tangentes *conjugées* que je nommerai *tangentes réciproques;* l'autre sur les développoïdes des courbes à double courbure.

I.

De la courbure des surfaces.

L'équation différentielle du premier ordre d'une surface étant:

$$dz = pdx + qdy, \qquad (1)$$

on sait que les quantités p et q déterminent la direction du plan qui touche la surface au point x, y, z; c'est par cette raison qu'on les appelle *élémens du contact du premier ordre.* Différentiant l'équation (1), en regardant les différentielles dx et dy comme constantes; et supposant qu'on ait:

$$dp = rdx + sdy,$$
$$dq = sdx + tdy,$$

on a:

$$d^2z = rdx^2 + 2\,sdxdy + tdy^2. \qquad (2)$$

Les quantités r, s et t sont des fonctions de x et y, qu'on nomme *élémens du contact du second ordre*, parce qu'elles déterminent les rayons de courbure des sections planes de la surface, qui passent par le point x, y, z. Supposons que ce point soit l'origine des coordonnées, et en même tems le point où le plan des xy touche la surface; l'axe des z sera une normale de cette surface, et le rayon de courbure d'une section normale passant par la droite $y = ax$, sera $\dfrac{1}{\left(\dfrac{d^2z}{dx^2+dy^2}\right)}$. A cause de $\dfrac{dy}{dx} = a$, ce rayon

de courbure sera $\dfrac{1}{\left(\dfrac{d^2z}{dx^2(1+\alpha^2)}\right)}$: l'équation (2) donne :

$$\frac{d^2z}{dx^2}=r+2s\alpha+t\alpha^2.$$

Substituant cette valeur dans l'expression du rayon ρ de courbure,

$$\rho=\frac{1+\alpha^2}{r+2s\alpha+t\alpha^2}. \qquad (3)$$

La grandeur de ce rayon dépend évidemment de la tangente trigonométrique α, qui peut varier, tandis que les quantités r, s et t sont constantes. Pour obtenir le plus grand et le plus petit rayon de courbure des sections normales, on aura :

$$d\left\{\frac{1+\alpha^2}{r+2s\alpha+t\alpha^2}\right\}=0;$$

d'où l'on tire :

$$\alpha^2+\alpha\left(\frac{r-t}{s}\right)-1=0. \qquad (4)$$

Nommant m et m' les deux racines de cette équation, on a :

$$mm'=-1 \quad \text{ou} \quad 1+mm'=0;$$

c'est ainsi qu'Euler a prouvé que le plus grand et le plus petit rayon de courbure des sections normales, correspondaient à deux sections, dont les plans font entre eux un angle droit ; on peut donc supposer que ces plans se confondent avec les plans des xz et des yz. Les valeurs ρ' et $\rho_{,}$ du plus grand et plus petit rayon de courbure étant :

$$\rho'=\frac{1+m^2}{r+2sm+tm^2}, \qquad \rho_{,}=\frac{1+m'^2}{r+2sm'+tm'^2},$$

elles deviennent, en supposant $m=0$, $m'=\infty$,

$$\rho'=\frac{1}{r}, \qquad \rho_{,}=\frac{1}{t}.$$

Les valeurs de m et m' étant données par l'équation (4),

$$m^2+m\left(\frac{r-t}{s}\right)-1=0. \qquad (4')$$

Il est évident que l'hypothèse de $m=0$ ou $=\infty$, donne $s=0$:

donc l'expression de ρ donnée par l'équation (3) se réduit à :

$$\rho = \frac{1+\alpha^2}{r+t\alpha^2}.$$

Mettant pour r et t leurs valeurs $\frac{1}{\rho'}$, $\frac{1}{\rho_{,}}$,

$$\rho = \frac{1+\alpha^2}{\frac{1}{\rho'}+\frac{\alpha^2}{\rho_{,}}} = \frac{\rho'\rho_{,}(1+\alpha^2)}{\rho_{,}+\rho'\alpha^2} = \frac{\rho'\rho_{,}}{\rho_{,}.\frac{1}{1+\alpha^2}+\rho'.\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}}.$$

Nommant A, l'angle des plans normaux qui contiennent les sections dont les rayons sont ρ et ρ', et dont la tangente trigonométrique est α, on a :

$$\text{tang}\, A = \alpha, \qquad \sin^2 A = \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}, \qquad \cos^2 A = \frac{1}{1+\alpha^2},$$

$$\rho = \frac{\rho'\rho_{,}}{\rho'\sin^2 A+\rho_{,}\cos^2 A}, \text{ ou } \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_{,}}\sin^2 A + \frac{1}{\rho'}\cos^2 A. \quad (5)$$

De ces quatre quantités ρ, ρ', $\rho_{,}$ et l'angle des plans normaux qui contiennent les rayons ρ et ρ', ou les rayons ρ et $\rho_{,}$, trois quelconques déterminent la quatrième, dont la valeur sera donnée par l'équation (5). (*Cette relation a été trouvée par Euler.*)

L'équation (5) fait voir que les rayons de courbure de deux sections normales, dont les plans font avec les plans des sections normales de plus grande ou plus petite courbure des angles égaux, sont de même grandeur.

Dans la même hypothèse de $m=0$, ou de $m'=\infty$, les plans des sections normales de plus grande et plus petite courbure, coïncident avec les plans des xz et des yz, et on a :

$$\rho' = \frac{1}{r}, \quad \text{et} \quad \rho_{,} = \frac{1}{t},$$

et par conséquent :

$$\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho_{,}} = r + t,$$

Ce dernier résultat est indépendant du choix des plans des coordonnées ; en effet, on a pour un rayon quelconque ρ d'une section normale :

$$\rho = \frac{1+\alpha^2}{r+2s\alpha+t\alpha^2}, \quad (3)$$

Et pour le rayon ρ_p de la section normale, perpendiculaire à la première :

$$\rho_p = \frac{1 + \frac{1}{\alpha^2}}{r - \frac{2s}{\alpha} + \frac{t}{\alpha^2}} = \frac{1 + \alpha^2}{r\alpha^2 - 2s\alpha + t} :$$

donc
$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_p} = r + t, \qquad (6)$$

quel que soit α. (*Dupin*, Correspondance, pag. 218, tom. Ier.)

Combinant les équations (3) et (4) (*) pour éliminer α, on obtient l'équation suivante :

$$(rt - s^2)\rho^2 - (r + t)\rho + 1 = 0; \qquad (7)$$

d'où l'on tirerait pour l'expression du rayon de la section normale de plus petite ou plus grande courbure : $\dfrac{2}{r + t \pm \sqrt{4s^2 + (t-r)^2}}$.

La valeur de ρ déduite de cette équation (7), n'appartient pas seulement au rayon de la section normale de plus grande ou plus

---

(*) *Calcul de l'élimination de* α.

Éliminant α^2 au moyen des équations (3) et (4), on trouve pour α la valeur suivante:

$$\alpha = \frac{2s - s\rho(t + r)}{2s^2\rho + (t + r)(t\rho - 1)}.$$

Résolvant l'équation (4), on a pour seconde valeur de α :

$$\alpha = \frac{t - r \pm \sqrt{4s^2 + (t - r)^2}}{2s}.$$

Égalant ces deux valeurs de α, on a:

$$(t\rho - 1)(4s^2 + (t - r)^2) \pm (2s^2\rho + (t - r)(t\rho - 1))\sqrt{4s^2 + (t - r)^2} = 0,$$

divisant par $\sqrt{4s^2 + (t - r)^2}$,

$$(t\rho - 1)\sqrt{4s^2 + (t - r)^2} + 2s^2\rho + (t - r)(t\rho - 1) = 0.$$

Élevant au carré pour faire disparaître le radical, et réduisant, on parvient à l'équation (7) :

$$(rt - s^2)\rho^2 - (r + t)\rho + 1 = 0.$$

petite courbure; elle est encore égale à la portion de la normale comprise entre la surface et le point de rencontre de cette normale, et d'une autre normale qui en est infiniment voisine. M. Monge est le premier qui a démontré cette propriété générale des surfaces (*), qu'une normale quelconque n'est rencontrée que par deux autres normales, qui en soient infiniment voisines; les portions de normale comprises entre les points de rencontre et la surface, sont égales aux rayons des sections normales de plus petite et de plus grande courbure. Pour le démontrer, soit:

$$x^2 + y^2 + (z - \rho)^2 = \rho^2,$$

ou
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\rho z;$$

l'équation d'une sphère du rayon ρ qui touche le plan des xy, à l'origine des coordonnées. Les équations de la normale au point x, y, z d'une surface $dz = pdx + qdy$, sont:

$$x' - x + p(z' - z) = 0,$$
$$y' - y + q(z' - z) = 0.$$

Pour que la normale passe par le centre de la sphère, dont les coordonnées sont $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = \rho$, on doit avoir:

$$\left.\begin{array}{l} -x + p(\rho - z) = 0, \\ -y + q(\rho - z) = 0. \end{array}\right\} \quad (n)$$

Pour une normale infiniment voisine, assujétie à passer par le même centre ($x' = 0$, $y' = 0$, $z' = \rho$), les équations (n) deviendront:

$$-(x + dx) + (p + dp)(\rho - (z + dz)) = 0,$$
$$-(y + dy) + (q + dq)(\rho - (z + dz)) = 0,$$

retranchons-en les équations (n), et on a:

$$\left.\begin{array}{l} -dx + dp(\rho - z) - pdz = 0, \\ -dy + dq(\rho - z) - qdz = 0: \end{array}\right\} \quad (n')$$

les deux systêmes d'équations (n) et (n') expriment que deux normales consécutives se coupent au point ($x' = 0$, $y' = 0$, $z' = \rho$). Mais lorsque le point de la surface que l'on considère, est à l'origine des coordonnées, on a:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad p = 0, \quad q = 0;$$

donc les quatre équations (n) et (n') se réduisent à ces deux ci:

$$-dx + \rho dp = 0, \qquad -dy + \rho dq = 0,$$

(*) Ce théorême est une conséquence d'une proposition plus générale, qui sera démontrée page 152.

d'où l'on tire :

$$\rho = \frac{dx}{dp}, \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{dy}{dq},$$

et

$$dxdq - dydp = 0.$$

Mettant dans cette équation pour dp et dq, leurs valeurs $rdx + sdy$, et $sdx + tdy$, on aura :

$$dx\,(sdx + tdy) - dy\,(rdx + sdy) = 0,$$

ou

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \left(\frac{r-t}{s}\right)\frac{dy}{dx} - 1 = 0, \qquad (4)$$

équation identique à l'équation (4) trouvée page 133, dans laquelle $a = \frac{dy}{dx}$.

L'équation $\rho = \frac{dx}{dp}$, donne $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - r\rho}{s\rho}$; mettant cette valeur dans l'équation (4), on obtient l'équation (7, pag. 135),

$$(rt - s^2)\,\rho^2 - (r + t)\,\rho + 1 = 0. \qquad (7)$$

Le rayon ρ qui a pour valeurs les racines de cette équation, est ce qu'on nomme le *rayon de courbure de la surface ;* il est en même tems le rayon de la section normale de plus grande ou plus petite courbure.

L'équation (5) établit la relation qui existe entre les rayons de courbure d'une surface et les rayons de courbure des sections normales. L'angle A qui entre dans cette équation, est la différence de deux angles, dont on connaîtra les tangentes par les équations (3) et (4'). Nous allons maintenant chercher la relation qui existe entre les rayons de courbure d'une section normale et d'une section oblique qui ont une tangente commune ; et pour simplifier le calcul, nous supposerons que cette tangente est l'axe des x ; que le point de contact est à l'origine des coordonnées, et enfin que le plan des xy touche la surface. Dans cette hypothèse, le plan des xz contient la section normale, le rayon de courbure de cette section est $\frac{1}{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)}$, et le rayon de courbure de la section oblique, est $\frac{1}{\left(\frac{d^2z'}{dx^2}\right)}$, en supposant $z' = \frac{z}{\cos\theta}$, et θ étant l'angle des plans des sections normale et oblique.

Cette valeur de z' donne :

$$\frac{d^2z'}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2 \cos\theta}.$$

Nommant R et R' les rayons de courbure des deux sections, on a :

$$R = \frac{1}{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)}, \qquad R' = \cos\theta \times \frac{1}{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)} :$$

donc $$R' = R\cos\theta. \tag{8}$$

Ce rapport entre les deux rayons R et R', fait voir que les cercles osculateurs de toutes les courbes d'une surface, dont les plans passent par une tangente de cette surface, appartiennent à une sphère dont le rayon est égal au rayon de courbure de la section normale qui passe par la même tangente. (*Théorême de Meusnier.*)

II.

Des tangentes réciproques (*).

Pour définir ces tangentes, il faut supposer qu'un plan tangent à une surface, passe d'une position quelconque, à une position infiniment voisine. Des deux *tangentes réciproques*, l'une est l'intersection de deux plans tangens consécutifs, et l'autre est le prolongement de la droite menée sur la surface par les deux points de contact infiniment voisins.

Soit comme précédemment :

$$dz = pdx + qdy,$$

l'équation différentielle d'une surface. Lorsqu'on suppose que le plan des xy touche la surface à l'origine des coordonnées, on a :

$$dz = 0, \quad pdx + qdy = 0.$$

Ayant mené par le point de contact, une droite de l'équation $y = \alpha x$, on aura pour le point de contact de la droite et de la surface :

$$\frac{dy}{dx} = \alpha, \quad p + q\alpha = 0.$$

(*) *Ce paragraphe est extrait des Mémoires de M. Dupin.*

Si l'on passe du premier plan tangent (celui des xy) à un second plan tangent infiniment voisin, qui coupe le premier suivant la droite $y = \alpha x$, on a pour le point de contact de ce second plan :

$$(p + dp) + \alpha(q + dq) = 0, \quad \text{ou} \quad dp + \alpha dq = 0,$$

et en mettant pour dp et dq, leurs valeurs :

$$r + s\frac{dy}{dx} + \alpha\left(s + \frac{t dy}{dx}\right) = 0. \qquad (9)$$

Cette équation contient la quantité $\frac{dy}{dx}$, qui détermine la direction de la droite menée sur la surface, par les points des contact des deux plans tangens consécutifs. Désignant cette quantité par α', la droite $y = \alpha' x$ est *la tangente réciproque* de celle dont l'équation donnée, est $y = \alpha x$. Cette réciprocité consiste en ce que les constantes α, α' qui déterminent ces tangentes, sont liées entre elles par une équation réciproque (*), dans laquelle on peut changer α en α', ou α' en α. Cette équation est :

$$r + s\alpha' + \alpha(s + t\alpha') = 0, \qquad (9)$$

ou

$$\frac{r}{t} + \frac{s}{t}(\alpha + \alpha') + \alpha\alpha' = 0.$$

Lorsque les tangentes réciproques sont rectangulaires, on a $\alpha\alpha' = -1$; et l'équation (9) devient

$$\alpha^2 + \alpha\left(\frac{r - t}{s}\right) - 1 = 0 : \qquad (1)$$

elle ne diffère pas de l'équation (4) trouvée page 137; ce qui prouve que dans ce cas, les tangentes réciproques appartiennent aux sections normales de plus petite et plus grande courbure.

(*) M. Monge avait déja remarqué cette propriété des tangentes réciproques, par rapport aux deux courbes d'une surface, qu'il a nommées *caractéristique*, et *trajectoire* des caractéristiques. Il exprime cette propriété de la manière suivante : (*voyez* son ouvrage d'Analyse appliquée à la géométrie, édition 1809, pag. 375.)

« La surface développable qui touche une surface enveloppe dans la caractéristique, et celle qui touche l'enveloppe dans la trajectoire, sont réciproques « en cela, que la première est le lieu des tangentes aux différentes trajectoires, « dont les points de contact sont pris sur la même caractéristique, tandis que « la seconde est le lieu des tangentes aux différentes caractéristiques, dont les « points de contact sont pris sur une même trajectoire. »

« Cette propriété mérite une grande attention, parce que c'est son expression « qui nous produira les deux équations aux différences ordinaires de la caractéristique. »

Des rayons de courbure des sections normales, menées par les tangentes réciproques.

Les sections normales, menées par les tangentes réciproques, jouissent de cette propriété, que la somme des rayons de courbure de ces deux sections menées par la même normale de la surface, est une quantité constante ; et comme les tangentes des sections de plus petite et de plus grande courbure sont réciproques, cette quantité est égale à la somme des rayons de courbure de la surface, qui correspondent au point d'intersection de ces tangentes.

Nommons ρ_d et $\rho_{d'}$ les deux rayons de courbure des sections normales, menées par les tangentes conjuguées $y = \alpha x$, $y = \alpha' x$; on aura:

$$\rho_d = \frac{1 + \alpha^2}{r + 2s\alpha + t\alpha'^2}, \qquad \rho_{d'} = \frac{1 + \alpha'^2}{r + 2s\alpha' + t\alpha'^2}, \tag{3}$$

et les quantités α, α' sont liées entre elles par l'équation:

$$\frac{r}{t} + \frac{s}{t}(\alpha + \alpha') + \alpha\alpha' = 0. \tag{9}$$

Tirant de cette équation la valeur de α', et la substituant dans l'expression (3) de $\rho_{d'}$, on a :

$$\rho_{d'} = \frac{r^2 + s^2 + 2s\alpha(r + t) + \alpha^2(s^2 + t^2)}{(rt - s^2)\{r + 2s\alpha + t\alpha^2\}};$$

d'où il suit:

$$\rho_d + \rho_{d'} = \frac{r + t}{rt - s^2}.$$

L'équation (7) fait voir que le coefficient $\frac{r + t}{rt - s^2}$ de ρ, pag. 137, est la somme des deux rayons de courbure ρ' et $\rho_,$ de la surface.

On a vu (page 132) qu'en prenant les plans des sections normales de plus grande et de plus petite courbure, pour plan des xz et des yz, les rayons de courbure de la surface ρ' et $\rho_,$ avaient pour expressions $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{t}$. Dans cette hypothèse, on a $s = 0$, et l'équation (9) se réduit à :

$$\frac{r}{t} + \alpha\alpha' = 0.$$

Prenons pour exemple l'ellipsoïde qui a pour sommet l'origine

des coordonnées, et dont les diamètres principaux sont parallèles aux axes des coordonnées ; l'équation de cet ellipsoïde sera :

$$\frac{1}{a^2}x^2+\frac{1}{b^2}y^2+\frac{1}{c^2}(z-c)^2=1,$$

ou

$$\frac{1}{a^2}x^2+\frac{1}{b^2}y^2+\frac{1}{c^2}z^2-\frac{2z}{c}=0.$$

Prenant les différences partielles de cette équation, on trouve dans l'hypothèse de $x=0$, $z=0$, $p=0$, $q=0$,

$$r=\frac{c}{a^2},\quad t=\frac{c}{b^2},\quad s=0:$$

donc

$$\rho'=\frac{a^2}{c},\quad \rho_{,}=\frac{b^2}{c};$$

ce qui signifie que les rayons de courbure au sommet de l'ellipsoïde, sont égaux aux rayons de courbure des deux sections principales qui passent par ce sommet.

L'équation des tangentes réciproques $\frac{r}{t}+\alpha\alpha'=0$, devient $\frac{b^2}{a^2}+\alpha\alpha'=0$; ce qui apprend que les tangentes réciproques se confondent en direction avec les diamètres conjugués de la section principale de l'ellipsoïde,

$$\frac{1}{a^2}x^2+\frac{1}{b^2}y^2=1,$$

section dont le plan est parallèle à celui des xy, tangent à la surface.

Cette dernière propriété étant le sujet principal du Mémoire de M. Dupin sur les tangentes réciproques, il les a nommées par cette raison *tangentes conjuguées*.

III.

Des courbes à double courbure.

De l'élément d'une courbe à double courbure.

Une courbe à double courbure étant projetée sur les plans rectangulaires des xz et des yz, les équations des projections de cette courbe, sont :

$$y=\varphi x,\qquad z=\psi x,$$

φ et ψ étant des fonctions dont la forme dépend de la nature de la courbe.

L'élément d'une courbe à double courbure correspondant au point x, y, z, a pour expression $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$; et a cause de $dy = dx\varphi' x$, $dz = dx\,\psi' x$, et écrivant pour abréger φ' et ψ', au lieu de $\varphi' x$ et $\psi' x$, on a pour l'expression de l'élement d_ς de la courbe,

$$d_\varsigma = dx\sqrt{1 + \varphi'^2 + \psi'^2}.$$

Des tangentes et des plans normaux d'une courbe à double courbure.

La tangente en un point de cette courbe dont les coordonnées sont x', $\varphi x'$, $\psi x'$, a pour équations de ses projections :

$$y - \varphi = (x - x')\,\varphi',$$
$$z - \psi = (x - x')\,\psi'.$$

Le plan normal à la courbe au point x', φ, ψ, est perpendiculaire à la tangente au même point : il a donc pour équation :

$$(z - \psi)\,\psi' + (y - \varphi)\,\varphi' + x - x' = 0,$$

équation d'un plan dont les traces sont perpendiculaires aux projections de la tangente.

Des plans osculateurs d'une courbe à double courbure.

Les tangentes d'une courbe à double courbure, prolongées indéfiniment, forment une surface développable à deux nappes séparées par la courbe même; un plan tangent à cette surface passe par deux tangentes consécutives, ou par deux élémens consécutifs de la courbe. On nomme ce plan, *plan osculateur de la courbe*. Cet équation est de la forme

$$z - \psi - B(y - \varphi) - A(x - x') = 0.$$

Différentiant deux fois de suite par rapport à x' seulement, on obtient deux équations; d'où l'on tire les valeurs suivantes de A et de B :

$$A = \frac{\psi'\varphi'' - \psi''\varphi'}{\varphi''}, \qquad B = \frac{\psi''}{\varphi''}.$$

Mettant pour A et B leurs valeurs, l'équation du plan osculateur est :

$$(z - \psi)\,\varphi'' - (y - \varphi)\,\psi'' - (x - x')\,(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi') = 0.$$

Des angles de contingence et de flexion.

L'angle de *contingence* d'une courbe à double courbure, est formé par deux tangentes consécutives, comprises dans le même plan osculateur ; il est égal à l'angle de deux plans normaux consécutifs, menés par les points de contact. L'angle *de flexion* designera l'angle compris entre deux plans osculateurs consécutifs.

Soient u, u'. u'' les cosinus des angles qu'un premier plan P fait avec les trois plans coordonnés ; en supposant que ces angles varient infiniment peu, leurs cosinus deviendront $u + du$, $u' + du'$, $u'' + du''$; le second plan P' déterminé par les nouveaux angles, fera avec le premier un angle infiniment petit ; nommant ds le sinus de cet angle, je dis qu'on aura :

$$ds^2 = du^2 + du'^2 + du''^2 ;$$

car les différentielles du, du', du'' des cosinus u, u', u'', sont les projections de l'arc ds sur les trois plans rectangulaires. En effet, négligeant les infinimens petits du seconde ordre, la droite sur laquelle on compte l'arc ds est perpendiculaire à-la-fois aux deux plans P et P' : le plan mené par cette droite et par une perpendiculaire à l'un des plans coordonnés, contient les deux angles que le plan des coordonnées fait avec les plans P et P' ; d'où il suit que l'arc ds a pour projection sur ce même plan des coordonnées, la différence des cosinus $u + du$ et u ; c'est-à-dire la différentielle du. On prouve de la même manière que les différentielles du' et du'' sont les projections du petit arc ds sur les deux autres plans des coordonnées : donc on a l'équation très-simple :

$$ds = \sqrt{du^2 + du'^2 + du''^2}.$$

Étant donnée l'équation d'un plan :

$$Lx + My + Nz = 0,$$

on sait qu'il fait avec les trois plans des coordonnées, des angles dont les cosinus u, u', u'', ont pour expression :

$$\frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

Différentiant ces quantités, on aura les valeurs des trois différentielles du, du', du'', et par conséquent le sinus de l'angle formé par les deux plans qui ont pour équation :

le premier, $\qquad ux + u'y + u''z = 0 ;$

le second, $\qquad (u + du)x + (u' + du')y + (u'' + du'')z = 0.$

Prenons pour exemple, les plans normal et osculateur de la courbe à double courbure (page 142); on a pour le premier :

$$u = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2+\psi'^2}},\quad u' = \frac{\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2+\psi'^2}},\quad u'' = \frac{\psi'}{\sqrt{1+\varphi'^2+\psi'^2}}.$$

Tirant de ces équations les valeurs de du, du', du'', et les substituant dans l'équation $ds = \sqrt{du^2 + du'^2 + du''^2}$, on a pour le sinus de l'angle de contingence dC :

$$\frac{dx'\sqrt{\varphi''^2 + \psi''^2 + (\varphi'\psi'' - \varphi''\psi')^2}}{1+\varphi'^2+\psi'^2} = dC.$$

L'équation du plan osculateur (page 142) donne :

$$\begin{aligned}
u &= \varphi'\psi'' - \varphi''\psi' &&: \sqrt{\varphi''^2 + \psi''^2 + (\varphi'\psi'' - \varphi''\psi')^2},\\
u' &= -\psi'' &&: \sqrt{\varphi''^2 + \psi''^2 + (\varphi'\psi'' - \varphi''\psi')^2},\\
u'' &= \varphi'' &&: \sqrt{\varphi''^2 + \psi''^2 + (\varphi'\psi'' - \varphi''\psi')^2};
\end{aligned}$$

et faisant pour abréger :

$$\varphi'\psi'' - \varphi''\psi' = \pi'',\qquad \sqrt{\varphi''^2 + \psi''^2 + \pi''^2} = k,$$

on a :

$$u = \frac{\pi''}{k},\qquad u' = \frac{-\psi''}{k},\qquad u'' = \frac{\varphi''}{k}.$$

En différentiant

$$\frac{du}{dx'} = \frac{k\pi''' - k'\pi''}{k^2},\quad \frac{du'}{dx'} = \frac{-k\psi''' + k'\psi''}{k^2},\quad \frac{du''}{dx'} = \frac{k\varphi''' - k'\varphi''}{k^2},$$

$$\frac{du^2 + du'^2 + du''^2}{dx'^2} = \left\{\begin{array}{l} k^2\pi'''^2 - 2kk'\pi''\pi''' + \pi''^2k'^2 \\ + k^2\psi'''^2 - 2kk'\psi''\psi''' + \psi''^2k'^2 \\ + k^2\varphi'''^2 - 2kk'\varphi''\varphi''' + \varphi''^2k'^2, \end{array}\right\} : k^4$$

l'expression de k donne :

$$k'^2 = \frac{(\varphi''\varphi''' + \psi''\psi''' + \pi''\pi''')^2}{k^2}.$$

Substituant les valeurs de k^2 et de k'^2, on a :

$$\frac{du^2 + du'^2 + du''^2}{dx'^2} = \frac{(\psi'''\varphi'' - \psi''\varphi''')^2 + (\pi'''\varphi'' - \pi''\varphi''')^2 + (\pi'''\psi'' - \pi''\psi''')^2}{(\varphi''^2 + \psi''^2 + \pi'')^2}.$$

Mettant pour π'' la quantité qu'elle représente, et observant que

$\pi''' = \varphi'\psi''' - \psi'\varphi'''$, on a pour l'expression du sinus de l'angle de *flexion* :

$$\sqrt{du^2 + du'^2 + du''^2} = \left\{ \frac{dx'(\varphi''\psi''' - \varphi'''\psi'')\sqrt{1 + \varphi'^2 + \psi'^2}}{\varphi''^2 + \psi''^2 + (\varphi'\psi'' - \varphi''\psi')^2} \right\} = dF,$$

dF étant l'angle de flexion (*).

Des rayons osculateurs d'une courbe à double courbure.

Le plan osculateur contient deux élémens consécutifs de la courbe ; si l'on conçoit dans ce même plan la circonférence qui passe par ces élémens ou par trois points consécutifs de la courbe, le rayon de ce cercle, est ce qu'on nomme *le rayon de courbure de la courbe*, ou *le rayon du cercle osculateur*. L'élément de la courbe, et les deux rayons du cercle osculateur qui passent par les extrémités de cet élément, forment un triangle isocèle, dans lequel nommant $d\varrho$ l'élément de la courbe ou du cercle osculateur, et R le rayon de ce cercle, on a $d\varrho = RdC$, et par conséquent $R = \frac{d\varrho}{dC}$.

Mettant pour $d\varrho$ sa valeur $dx'\sqrt{1 + \varphi'^2 + \psi'^2}$, et pour dC sinus de l'angle de contingence, l'expression trouvée ci-dessus (page 144), on a :

$$\text{Rayon de courbure, } R = \frac{(1 + \varphi'^2 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\varphi''^2 + \psi''^2 + (\psi''\varphi' - \psi'\varphi'')^2}}.$$

M. Lacroix a donné dans son Traité de calcul différentiel, in-4°., 2e. édition, page 627, cette formule plus complette qu'on déduirait facilement de ce qui précède :

$$R^2 = \frac{d\varrho^6}{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}.$$

(*) On doit à M. Fourier, cette remarque ingénieuse, que les plans normaux à une courbe à double courbure, forment par leurs intersections succesives, une surface développable, dont l'arête de rebroussement a des angles de contingence et de flexion égaux aux angles de flexion et de contingence de la courbe à double courbure donnée ; chaque plan normal à cette courbe contenant les points des deux courbes, pour lesquels ces angles sont réciproquement égaux.

Cette proposition est une conséquence de la propriété de la pyramide supplémentaire. Il suffit de considérer la pyramide triangulaire, dont les arêtes seraient parallèles à trois tangentes consécutives d'une courbe à double courbure, et les trois plans perpendiculaires à ces tangentes, qui comprennent une seconde pyramide, supplémentaire de la première.

Des formules par lesquelles on trouve les points singuliers des Courbes à double courbure.

Les points singuliers des courbes à double courbure sont ceux pour lesquels les angles de contingence ou de flexion deviennent nuls. L'angle de contingence ne peut devenir nul que dans le cas où l'on a $\varphi'' = 0$, $\psi'' = 0$; ces formules sont aussi celles par lesquelles on trouverait les points de rebroussement des projections de la courbe, et ce qui doit être en effet; car s'il y a rebroussement dans une courbe à double courbure, ce rebroussement affecte ses projections.

Quand aux points singuliers pour lesquels l'angle de flexion est nul, on les détermine par la formule (page 145) $dF = 0$, ou

$$\varphi''\psi''' - \varphi'''\psi'' = 0.$$

Pour que la courbe soit plane, il faut que cette équation de condition soit satisfaite par les valeurs des coordonnées d'un point quelconque de la courbe proposée.

IV.

Sur les développoïdes des courbes planes, et des courbes à double courbure.

Extrait d'un Mémoire lu à l'Institut, le 22 décembre 1806, par M. Lancret, imprimé en 1811, tom. II des Savans étrangers de l'Institut.

Si par tous les points d'une courbe plane ou à double courbure, on mène des lignes droites qui se rencontrent deux à deux consécutivement, en coupant la courbe sous un angle constant, ces droites sont les tangentes de la courbe que M. Lancret nomme *développoïde*.

Les développoïdes d'une courbe à double courbure, qui correspondent à l'angle sous lequel les tangentes de développoïdes coupent la courbe, sont d'autres courbes à double courbure, tracées sur une même surface. Cette surface est l'enveloppe de l'espace que parcourt un cône droit, dont le sommet se meut sur la courbe donnée, et dont l'axe s'applique successivement sur les tangentes de cette courbe. Lorsque la courbe donnée est plane, elle a un système de développoïdes situées dans le même plan que la courbe. Ces développoïdes planes jouissent d'une propriété remarquable, démontrée par Réaumur, Mémoires de l'Académie des sciences de

Paris, année 1709. Ce savant suppose qu'on ait mené deux droites infiniment voisines qui coupent une courbe plane sous un angle donné ; elles se rencontrent sur le plan de cette courbe en un point ; la portion de l'une ou l'autre secante, comprise entre ce point et le point de la courbe d'où elles partent, est ce qu'on nomme *rayon de la développoïde*. Réaumur a prouvé *qu'en faisant varier l'angle sous lequel deux droites consécutives coupent la courbe, les rayons de developpoïdes correspondans à l'angle variable*, sont les cordes d'une circonférence, dont le diamètre est égal au rayon du cercle, *qui est osculateur de la courbe aux points infiniment voisins, par lesquels on a mené les secantes* (*).

Pour démontrer cette proposition, soit (fig. 1, pl. 1) $AMNB$ la courbe proposée ; MT, NT les tangentes aux points M et N ; MO, NO les droites qui coupent les tangentes sous les angles égaux tMO, TNO. Les trois points M, N, O, et le point T d'intersection des deux tangentes sont situés sur un cercle $MNOT$, tel que deux autres cordes quelconques MO', NO' de ce cercle, feront avec les tangentes MT, TN des angles égaux. Mais lorsque les points M et N seront infiniment voisins, le diamètre MR du cercle $MNOT$ sera le rayon de courbure de la courbe $AMNB$ au point M ; donc tous les rayons de développoïdes planes de cette courbe, et qui partent de l'un de ses points M, sont des cordes d'une circonférence, qui a pour diamètre le rayon du cercle osculateur de la courbe au même point M.

De la surface des développoïdes d'une courbe plane.

Soit $y = \varphi x$ l'équation de la courbe, l'équation de sa tangente en un point $\alpha, \varphi\alpha$, sera :

$$y - \varphi\alpha = (x - \alpha)\,\varphi'\alpha.$$

Le cône droit dont le sommet est au point de la courbe $\alpha, \varphi\alpha$, et qui a pour axe la tangente au même point, peut être considéré comme une surface de révolution composée de cercles, résultant de l'intersection de deux sphères variables ; la première du rayon arbitraire r, a pour équation :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + z^2 = r^2 ; \qquad (1)$$

(*) Lorsque la courbe est à double courbure, le cercle osculateur suivant un élément de cette courbe, a pour rayon, le diamètre d'une circonférence qui est le lieu des extrémités des rayons de développoïdes, menés par les extrémités de cet élément dans le plan du cercle osculateur. H. C.

la seconde, du rayon $r \sin \omega$, (ω étant l'angle de l'axe et de la génératrice du cône), sera :

$$\left(x-\alpha-\frac{r\cos\omega}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\right)^2+\left(y-\varphi\alpha-\frac{r\varphi'\cos\omega}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\right)^2+z^2=r^2\sin^2\omega. \quad (2)$$

Développant l'équation (2), la réduisant, et éliminant le rayon arbitraire r, on a pour l'équation du cône droit :

$$\{x-\alpha+\varphi'(y-\varphi\alpha)\}^2=\cos^2\omega\,((x-\alpha)^2+(y-\varphi\alpha)^2+z^2)(1+\varphi'^2). \quad (3)$$

Différentiant par rapport à α, seulement :

$$\left.\begin{aligned}&\{x-\alpha+(y-\varphi\alpha)\varphi'\alpha\}((y-\varphi)\varphi''-(1+\varphi'^2))\\ &=-\cos^2\omega\,(1+\varphi'^2)\,\{x-\alpha+(y-\varphi)\varphi'\}\\ &+\cos^2\omega\,((x-\alpha)^2+(y-\varphi\alpha)^2+z^2)\,\varphi'\varphi''.\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

L'élimination de α entre les équations (3) et (4) donne l'équation de la surface des développoïdes qui correspondent à l'angle ω.

Si l'on veut discuter la courbe qui résulte de l'intersection de deux cônes droits consécutifs, on pourra supposer dans les équations (3) et (4) :

$$\alpha=0, \qquad \varphi\alpha=0, \qquad \varphi'\alpha=0,$$

ce qui revient à placer le sommet du premier cône à l'origine des coordonnées, et l'axe de ce cône, ou la tangente à la courbe au point (α, $\varphi\alpha$) sur l'axe des x. Cette hypothèse réduit ces équations (3) et (4) aux suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}&x^2\sin^2\omega=\cos^2\omega\,(y^2+z^2),\\ &y\varphi''\alpha=\sin^2\omega,\end{aligned}\right\}$$

ou

$$\left\{\begin{aligned}&x^2\sin^2\omega=\cos^2\omega\left(z^2+\frac{\sin^4\omega}{\varphi''^2\alpha}\right),\\ &y\varphi''\alpha=\sin^2\omega;\end{aligned}\right\}$$

d'où il suit que deux cônes consécutifs se coupent suivant une hyperbole dont le plan est perpendiculaire au plan de la courbe donnée, et parallèle à la tangente de cette courbe, qui sert d'axe au premier cône. Les demi-axes de cet hyperbole sont :

$$\frac{\sin^2\omega}{\varphi''\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\sin\omega\cos\omega}{\varphi''\alpha},$$

$\varphi''\alpha$ étant la valeur de cette fonction qui correspond à $\alpha=0$.

Pour appliquer les équations (3) et (4) au cas particulier du cercle, supposons que ce cercle ait pour équation :

$$x^2+y^2=\rho^2,$$

ce qui donne :

$$\varphi\alpha=\sqrt{1-\alpha^2},\qquad \varphi'\alpha=-\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (3), elle devient :

$$(x\sqrt{\rho^2-\alpha^2}-\alpha y)^2=\rho^2\cos^2\omega\{(x-\alpha)^2+(y-\sqrt{\rho^2-\alpha^2})^2+z^2\}; \quad (5)$$

la différentiant par rapport à α, seulement :

$$(x\sqrt{\rho^2-\alpha^2}-\alpha y)(\alpha x+y\sqrt{\rho^2-\alpha^2}-\rho^2\cos^2\omega)=0.$$

Des deux facteurs qui forment cette équation, le premier égalé à zéro exprimerait que le cercle donné se réduit au point $x=\alpha$, $y=\varphi\alpha$, $z=0$. Le second facteur égalé à zéro appartient à la surface des développoïdes du cercle qui correspondent à l'angle ω. On a donc pour cette surface :

$$\alpha x+y\sqrt{\rho^2-\alpha^2}-\rho^2\cos^2\omega=0. \quad (6)$$

Développant l'équation (5), on a :

$$\rho^2x^2-\alpha^2x^2-2\alpha xy\sqrt{\rho^2-\alpha^2}+\alpha^2y^2$$
$$=\rho^2\cos^2\omega\{x^2+y^2+z^2+\rho^2-2\alpha x-2y\sqrt{\rho^2-\alpha^2}\}. \quad (5)$$

L'équation (6) donne :

$$-2\alpha x-2y\sqrt{\rho^2-\alpha^2}=-2\rho^2\cos^2\omega$$
$$\alpha^2x^2+2\alpha xy\sqrt{\rho^2-\alpha^2}=\rho^4\cos^4\omega-y^2(\rho^2-\alpha^2).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (5) ; elle devient :

$$(x^2+y^2)\sin^2\omega=\cos^2\omega(z^2+\rho^2)-\rho^2\cos^4\omega, \quad (5)$$

ou

$$(x^2+y^2)\,\mathrm{tang}^2\omega=z^2+\rho^2\sin^2\omega. \quad (5)$$

Cette équation appartient à un hyperboloïde de révolution, engendré par une droite faisant un angle ω avec le plan des xy, et distante de l'axe des z d'une quantité $\rho\cos\omega$, rayon du plus petit cercle de la surface, concentrique au cercle donné $x^2+y^2=\rho^2$.

(*Fin de l'extrait du Mémoire de M. Lancret.*)

En recherchant ce que devient dans la géométrie aux trois dimensions, la propriété des développoïdes, analogue a celle que Réaumur a démontrée pour les courbes planes, on trouvera le théoreme suivant:

« Si par une droite tangente à une surface, on conçoit toutes « les sections dont les plans passent par cette tangente, le lieu des « extrémités de tous les rayons de *développoïdes*, qui correspondent « dans chaque section au point de contact de la droite et de la sur« face, est une sphère, et le diamètre de cette sphère, est égal au « rayon du cercle osculateur de la section normale, dont le plan « passe par la tangente à la surface ».

Démonstration. D'après Réaumur, la circonférence qui a pour diamètre, le rayon du cercle osculateur d'une courbe plane, est le lieu des extrémités des rayons de développoïdes, correspondans au point de contact de la courbe et du cercle; or, tous les cercles osculateurs des sections planes d'une surface passant par une tangente à cette surface, appartiennent à la sphère dont le grand cercle est osculateur de la section normale menée par la tangente, (*voyez* page 138, équat. 8). Donc, etc.

Sur la ligne la plus courte entre deux points d'une surface.

Si par chacun des points de cette ligne, on conçoit le plan tangent à la surface, ce plan engendre une surface développable, circonscrite à la surface proposée, et en la développant, la ligne la plus courte devient évidemment une ligne droite sur le développement. C'est par cette raison que dans un Mémoire sur les courbes à double courbure (26 avril 1802, tom. I^{er}. des Savans étrangers de l'Institut, année 1805), M Lancret nomme cette surface développable, surface *rectifiante* de la ligne la plus courte. Il suppose dans ce Mémoire que les plans osculateurs de la ligne la plus courte d'une surface, sont perpendiculaires aux plans tangens de cette surface. Il suit évidemment de cette hypothèse, qu'en menant par les tangentes d'une courbe donnée, une suite de plans perpendiculaires aux plans osculateurs de la courbe, les intersections successives de ces plans, forment la surface *rectifiante* de la courbe proposée.

On démontre par la synthèse, dans le Dictionnaire de l'Encyclopédie, à l'article *Courbe à double courbure*, cette proposition : « les plans osculateurs de la ligne la plus courte d'une surface sont perpendiculaires aux plans tangens de cette surface », la proposition est vraie, mais la démonstration n'est pas satisfaisante.

Sur une sphère, dit-on, la ligne la plus courte est un grand cercle, dont le plan est perpendiculaire au plan tangent; or, tout élément de surface infiniment petit se confond avec la surface d'une sphère : donc, etc. On sait qu'une sphère ne peut avoirde contact du second ordre que suivant une ligne déterminée de cette surface; on ne peut donc pas supposer que les élémens de la sphère et de la surface se confondent.

J'ai cherché une autre démonstration synthétique, fondée sur le mode de génération de la ligne la plus courte entre deux points d'une surface développable. Désignons, pour abréger, cette surface par la lettre S. Menons-lui un plan tangent, et tirons dans ce plan une droite quelconque D; supposons que ce plan se meuve en touchant continuellement la surface S. Dans ce mouvement la droite D prolongée indéfiniment dans toutes ses positions, engendre une autre surfacé développable S', dont l'arête de rebroussement est formée par les points de contact de la droite mobile D et de la surface S. Il est évident que cette arête de rebroussement a pour surface rectifiante la surface développable S, et quelle est la ligne la plus courte entre deux points quelconques de cette surface; il s'agit de démontrer que les plans osculateurs de cette ligne sont perpendiculaires aux plans tangens de la surface développable S. En effet, lorsque la droite D passe d'une position à la position infiniment voisine, elle engendre une portion de cône droit, dont l'axe est une droite de la surface S; or, le plan tangent à cette surface passe par cette droite: donc il est perpendiculaire à ce petit cône droit, engendré par la droite D; mais ce petit cône est touché par le plan osculateur de l'arête de rebroussement, ou de la ligne la plus courte, puisque ce plan passe par deux tangentes infiniment voisines de cette ligne, qui sont en même tems des arêtes du petit cône : donc le plan tangent de la surface S est perpendiculaire à ce même plan osculateur.

Il est donc démontré que la ligne la plus courte d'une surface développable, a des plans osculateurs perpendiculaires aux plans tangens de cette surface. Considérons maintenant une surface quelconque, et sa ligne la plus courte entre deux de ses points. Cette ligne sera aussi la plus courte sur la surface développable passant par cette ligne, et circonscrite à la surface proposée. Donc les plans osculateurs de la ligne la plus courte entre deux points d'une surface quelconque, sont perpendiculaires aux plans tangens de cette surface.

Il est à remarquer que deux surfaces développables, dont la première a pour arête de rebroussement, une des lignes les plus courtes entre deux points de la seconde, se coupent à angle droit dans tous les points de la ligne qui leur est commune. H. C.

Démonstration d'un théorème de Géométrie analytique; *par M.* Monge.

Le théorème qu'on a démontré, page. 136, « Une normale quelconque d'une surface, n'est rencontrée que par deux autres normales qui en soient infiniment voisines », est une conséquence d'une proposition plus générale que M. Monge a donnée dans les Mémoires de l'académie de Paris, année 1781. Voici comme il l'énonce : « Si par tous les points d'un plan, ou d'une surface courbe, « dont la forme et la position sont données, on conçoit des droites « menées dans l'espace, suivant une loi quelconque; de toutes celles « qui l'environnent, et qui en sont infiniment proches, il n'y en a « généralement que deux qui la coupent, et qui, par conséquent, « soient dans le même plan avec elle ».

« On suppose dans cet énoncé que, pour chaque point de la sur« face, la loi ne donne qu'une droite, ou que si elle en donne « plusieurs, on ne considère que la suite de celles qui sont données « par la même solution ».

Pour démontrer cette proposition, prenons un point (x, y, z) sur la surface $dz = pdx + qdy$; et menons par ce point une droite dont les équations soient :

$$(1) \quad x' - x = L(z' - z), \qquad (2) \quad y' - y = M(z' - z);$$

x', y', z' sont les coordonnées d'un point quelconque de la droite, et L, M des fonctions connues des coordonnées x, y du point de la surface; ensorte qu'on ait :

$$dL = ldx + l'dy, \quad \text{et} \quad dM = mdx + m'dy,$$

l, l', m, m' étant des fonctions quelconques, mais déterminées en x et y.

Lorsque la droite des équations (1) et (2) passera du point (x, y, z) de la surface au point $(x + dx, y + dy, z + dz)$ de cette même surface; on exprimera que la seconde droite correspondant à cette nouvelle position, rencontre la première, en différentiant les équations (1) et (2), et en regardant les coordonnées x', y', z' comme constantes.

Les équations différentielles qu'on obtient, sont :

$$-dx = (z' - z)\,dL + Ldz, \quad -dy = (z' - z)\,dM + Mdz.$$

Éliminant $(z' - z)$, on a :

$$dM\,(Ldz + dx) = dL\,(Mdz + dy),$$

ou :

$$dz\,(LdM - MdL) + dxdM - dydL = 0.$$

Substituant dans cette équation, pour dz, dL, dM leurs valeurs en dx et dy, elle devient :

$$\left\{\begin{array}{l} (pdx + qdy)\,\{L\,(mdx + m'dy) - M\,(ldx + l'dy)\} \\ + dx\,(mdx + m'dy) - dy\,(ldx + l'dy) = 0, \end{array}\right.$$

ou :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy^2}{dx^2}(q(Lm' - Ml') - l') + \dfrac{dy}{dx}(L(pm' + qm) - M(pl' + ql) + m' - l) \\ + p\,(Lm' - Ml) + m = 0. \end{array}\right\}(3)$$

Cette équation étant du second degré en $\dfrac{dy}{dx}$, on voit qu'il n'y a que deux directions sur la surface, pour passer de la droite des équations (1) et (2), à une droite infiniment voisine, qui la rencontre.

Si l'on suppose dans l'équation (3) que les quantités p et q sont constantes, toutes les droites représentées par les équations (1) et (2) aboutiront à un plan. Lorsque ce plan se confond avec celui des xy, on a $p = 0$, $q = 0$, et l'équation (3) se réduit à :

$$\frac{dy^2}{dx^2}\,l' + \frac{dy}{dx}\,(l - m') - m = 0.$$

Il résulte de la proposition de M. Monge, que les rayons de lumière qui partent d'un corps lumineux quelconque, et qui subissent un nombre quelconque de réflexions et de réfractions sur des surfaces polies ou transparentes, forment dans l'espace des séries de surfaces développables, dont les arêtes de rebroussement déterminent *les caustiques* de réflexion et de réfraction. On voit de très-belles applications de ce principe, dans le traité d'optique de Malus, qui précède son Mémoire sur la théorie de la double réfraction de la lumière dans les substances cristallisées. (*Voyez* les Mémoires présentés à l'Institut, tome II, janvier 1811.)

H. C.

Extrait d'un Mémoire sur les surfaces élastiques; par M. Poisson (*).

(Lu à l'Institut, le 1er. août 1814.)

Ce Mémoire est divisé en deux parties. La première est relative aux surfaces flexibles et non élastiques, dont M. Lagrange a déja donné l'équation d'équilibre, dans la nouvelle édition de la *Mécanique analytique*, tom. Ier., page 149. Je parviens à la même équation par un moyen différent, qui a l'avantage de montrer à quelle restriction particulière elle est subordonnée. Elle suppose, en effet, chaque élément de la surface également tendu en tous sens; condition qui n'est pas remplie dans un grand nombre de cas, et qui serait, par exemple, impossible dans le cas d'une surface pesante et inégalement épaisse. Pour résoudre complètement la question, il a fallu avoir égard à la différence des tensions qu'éprouve un même élément dans deux sens différens; on trouve alors des équations d'équilibre qui comprennent celles de la mécanique analytique, mais qui sont beaucoup plus générales, et aussi plus compliquées.

La surface flexible présente, dans un cas particulier, un résultat digne d'être remarqué. Si l'on suppose tous ces points pressés par un fluide pesant, on obtient pour son équation celle que M. Laplace a trouvée pour la surface capillaire, concave ou convexe; d'où il résulte que quand un liquide s'élève ou s'abaisse dans un tube capillaire, il prend la même forme qu'un linge flexible et imperméable qui serait rempli d'un fluide pesant.

Après avoir trouvé l'équation d'équilibre d'une surface flexible dont tous les points sont tirés ou poussés par des forces quelconques, il ne reste plus, pour en conclure l'équation de la surface élastique, qu'à comprendre au nombre de ces forces celles qui proviennent de l'élasticité : la détermination de cette espèce particulière de forces fait l'objet de la seconde partie de mon Mémoire, et voici sur quel principe elle est fondée.

Quelle que soit la cause de l'élasticité des corps, il est certain qu'elle consiste en une tendance de leurs molécules à se repousser

(1) La classe des Sciences physiques et mathématiques de l'Institut, a remis au concours pour l'année 1815, la théorie des oscillations des lames élastiques. Cet extrait du Mémoire de M. Poisson, sur les surfaces élastiques, sera très-utile aux jeunes géomètres qui concourent pour le prix; c'est ce motif qui m'a déterminé à l'insérer dans notre Correspondance, quoiqu'il ait déja paru dans un Bulletin de la société philomatique. — Le Mémoire entier paraîtra dans le volume de l'Institut, année 1812, 2e. partie. H. C.

mutuellement, et qu'on peut l'attribuer à une force répulsive qui s'exerce entre elles suivant une certaine fonction de leurs distances. D'ailleurs il est naturel de penser que cette force, ainsi que toutes les autres actions moléculaires, n'est sensible que jusqu'à des distances imperceptibles; la fonction qui en exprime la loi doit donc être regardée comme nulle dès que la variable qui représente la distance n'est plus extrêmement petite : or on sait que de semblables fonctions disparaissent en général dans le calcul, et ne laissent dans les résultats définitifs que des intégrales totales ou des constantes arbitraires qui sont des données de l'observation. C'est, en effet, ce qui arrive dans la théorie des réfractions, et mieux encore dans la théorie de l'action capillaire, l'une des plus belles applications de l'analyse à la physique qui soient dues aux géomètres. Il en est de même dans la question présente, et c'est ce qui a permis d'exprimer les forces qui proviennent de l'élasticité de la surface en quantités dépendantes uniquement de sa figure, telles que ses rayons de courbure principaux et leurs différences partielles. Substituant donc ces expressions à la place des forces, dans les équations générales de l'équilibre des surfaces, données dans la première partie du Mémoire, on parvient enfin à l'équation de la surface élastique qu'il s'agissait de trouver. Il serait impossible de donner dans cet extrait le détail des calculs qui conduisent à cette équation; nous nous contenterons donc de la faire connaître, en renvoyant, pour sa démonstration, au Mémoire même.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la surface, point que nous appellerons m; considérons z comme fonction de x et y, et faisons, pour abréger :

$$\frac{dz}{dx}=p, \qquad \frac{dz}{dy}=q, \qquad \sqrt{1+p^2+q^2}=k.$$

Soient aussi ρ et ρ' les deux rayons de courbure principaux de cette surface, qui répondent au point m; désignons par P et Q deux fonctions de ces rayons, savoir :

$$P=\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}, \qquad Q=\frac{1}{\rho\rho'};$$

de sorte que l'on ait, d'après les formules connues :

$$P=\frac{1+q^2}{k^3}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{2pq}{k^3}\cdot\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{1+p^2}{k^3}\cdot\frac{d^2z}{dy^2},$$

$$Q=\frac{1}{k^4}\cdot\left(\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2\right).$$

Représentons par X, Y, Z les forces données qui agissent sur le point quelconque m, parallèlement aux axes des x, y, z; supposons ces forces telles que la formule $Xdx + Ydy + Zdz$ soit la différentielle exacte d'une fonction de x, y, z, et désignons son intégrale par Π. Enfin, supposons la surface élastique également épaisse dans toute son étendue, et soit ε son épaisseur constante; son équation d'équilibre sera :

$$n^2\varepsilon^2\left[\frac{1+q^2}{k}\cdot\frac{d^2P}{dx^2}-\frac{2pq}{k}\,\frac{d^2P}{dx\,dy}+\frac{1+p^2}{k}\cdot\frac{d^2P}{dy^2}-pP\frac{dP}{dx}-qP\frac{dP}{dy}\right.$$
$$\left.+\frac{kP}{2}(P^2-4Q)\right]=Z-pX-qY-kP\Pi. \qquad (a)$$

Le coefficient n représente ici une constante qui dépend de l'élasticité naturelle de la surface; il est nul dans le cas des surfaces flexibles et non élastiques, ce qui réduit leur équation d'équilibre à

$$Z-pX-qY-kP\Pi=0;$$

résultat qui coïncide avec celui de la mécanique analytique que j'ai cité plus haut.

Non-seulement l'équation (a) suppose l'épaisseur constante; mais elle ne convient aussi qu'à une surface élastique naturellement plane, et elle ne comprend pas les surfaces, telles que les cloches et autres, dont la figure naturelle est courbe. Si l'on y supprime tout ce qui est relatif à l'une des deux coordonnées x et y, par exemple à y, la surface se changera en un cylindre parallèle à l'axe des x, et l'équation (a) devra alors coïncider avec l'équation ordinaire de la lame élastique; c'est, en effet, ce qu'il est aisé de vérifier après quelques transformations faciles à imaginer.

J'ai donné, à la fin de ce Mémoire, la démonstration d'une propriété de la surface élastique, analogue à celle de la lame que Daniel Bernouilli a fait connaître. Suivant ce géomètre, si l'on désigne par ds l'élément de la courbe élastique, et par ρ son rayon de courbure, l'intégrale $\int\frac{ds}{\rho^2}$ prise dans toute son étendue, est un *minimum*, entre toutes les courbes de même longueur. Cette propriété suppose que l'on fait abstraction de la pesanteur et de toute autre force donnée; or, dans la même hypothèse, on trouve, relativement à la surface élastique, que l'intégrale double :

$$\iint\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)^2 k\,dxdy,$$

est pareillement un *minimum* ; ρ, ρ' et k représentant les mêmes quantités que ci-dessus, et l'intégrale devant s'étendre à la surface entière. J'ai aussi remarqué que la variation de l'intégrale :

$$\iint \frac{k\,dx\,dy}{\rho\rho'},$$

ne renferme que des termes relatifs aux limites ; d'où il suit que la même propriété du *minimum* a également lieu pour toute intégrale formée de la précédente, augmentée ou diminuée d'un multiple quelconque de cette dernière.

La recherche des équations d'équilibre des surfaces élastiques appartient à la mécanique générale ; c'est uniquement sous ce rapport que je l'ai considérée dans ce Mémoire ; mais cette théorie comprend comme application une des branches les plus étendues et les plus curieuses de l'acoustique. Je veux parler des lois que suivent les vibrations des plaques élastiques, des figures qu'elles présentent, et des sons qu'elles font entendre pendant leur mouvement. En effet, l'équation fondamentale qui doit servir à déterminer les petites oscillations d'une plaque sonore, se déduit de son équation d'équilibre, par les principes ordinaires de la mécanique. Supposons donc que la plaque s'écarte très-peu d'un plan fixe qui sera celui de x, y, et négligeons, en conséquence, toutes les quantités de seconde dimension, par rapport à z et à ses différences partielles : l'équation (a) se réduira d'abord à

$$Z - pX - qY = \Pi\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right) + n^2\varepsilon^2\left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right).$$

De plus, faisons abstraction du poids de la plaque, et supposons, comme dans les problèmes des cordes et des lames vibrantes, que chaque point de la plaque reste, pendant le mouvement, dans une même perpendiculaire au plan fixe ; t étant la variable qui représente le tems, il faudra faire alors

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = -\varepsilon\frac{d^2z}{dt^2};$$

l'intégrale Π se réduira à une constante arbitraire, que j'appellerai c ; et l'équation du mouvement sera enfin

$$\varepsilon\frac{d^2z}{dt^2} + c\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right) + n^2\varepsilon^2\left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right) = 0.$$

J'ai démontré, dans mon Mémoire, que cette constante c dépend des forces qui tirent la surface à ses extrémités, et qui pro-

duisent ce qu'on appelle la tension. Elle est nulle quand ces forces n'existent pas ; ce qui réduit notre équation à

$$\frac{d^2z}{dt^2} + n^2\varepsilon\left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\,\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right) = 0. \qquad (b)$$

Mais si l'on voulait considérer les surfaces tendues, telles que les tambours, par exemple, il faudrait, au contraire, conserver la constante c, et supposer $n = 0$; ce qui donne, en changeant le signe de c :

$$\varepsilon\,\frac{d^2z}{dt^2} = c\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right);$$

équation déja trouvée par Euler, et qui est aussi celle dont MM. Biot et Brisson se sont servis pour déterminer quelques propriétes des vibrations des surfaces tendues.

Il y a environ cinq ans, la première classe de l'Institut a proposé, comme sujet de prix, la théorie mathématique des vibrations des plaques sonores, vérifiée par la comparaison avec l'expérience; mais, depuis cette époque, on n'a reçu qu'une seule pièce digne de l'attention de la classe. Au commencement de ce Mémoire, l'auteur anonyme pose, sans preuve suffisante, ou même tout-à-fait sans démonstration, une équation qui est précisément notre équation (b). Il y satisfait par des intégrales particulières, composées d'exponentielles, de sinus et de cosinus ; et en cela il suit l'exemple qu'Euler a donné en plusieurs endroits, relativement à l'équation des lames vibrantes. A chacune de ces intégrales, répond une figure particulière de la plaque sonore, et le son qu'elle rend dépend en général du nombre de lignes nodales qui se forment pendant ses vibrations. L'auteur calcule le ton relatif à chaque figure, puis il compare le ton calculé à celui que donne l'expérience pour une figure semblable : il trouve un accord satisfaisant entre ces deux résultats ; de sorte que l'équation des plaques vibrantes, quoiqu'elle ne fût pas jusqu'ici démontrée *à priori*, était du moins suffisamment justifiée par l'expérience. Cette comparaison est la partie de son travail qui a motivé la mention honorable de la classe : elle porte sur un grand nombre des expériences de M. Chladni, et sur beaucoup d'autres qui sont propres à l'ingénieux auteur du Mémoire dont nous parlons. Il y aurait une autre espèce de comparaison bien plus difficile à entreprendre, qui serait relative à la figure produite d'après une manière donnée de mettre la plaque en vibration. On pourrait aussi desirer que les résultats du calcul fussent déduits de l'intégrale générale, et non pas de quelques intégrales particulières de l'équation (b). Malheureusement cette équa-

tion ne peut s'intégrer sous forme finie que par des intégrales définies qui contiennent des imaginaires sous les fonctions arbitraires ; et si on les fait disparaître, ainsi que M. Plana y est parvenu dans un cas pareil (celui des lames vibrantes), on tombe sur une équation si compliquée, qu'il paraît très-difficile d'en faire aucun usage.

Pour indiquer ici tout ce qui a été fait jusqu'à présent sur les surfaces élastiques, je dois aussi faire mention d'un Mémoire sur les vibrations des plaques sonores, qui se trouve dans le volume de Pétersbourg pour l'année 1787. En partant d'une hypothèse trop précaire, l'auteur est conduit à une équation différentielle, qui n'est point exacte, et qui revient à l'équation (*b*), en y supprimant le terme multiplié par $\frac{d^4z}{dx^2dy^2}$. Il y satisfait aussi par des intégrales particulières, composées d'exponentielles, de sinus et de cosinus ; mais il remarque lui-même que les conclusions qui s'en déduisent ne sont pas d'accord avec les expériences de M. Chladni ; et maintenant, que nous connaissons la véritable équation du mouvement des plaques, nous voyons clairement la cause de cette discordance.

De la manière d'employer le principe de la moindre action, pour obtenir les équations du mouvement, rapportées aux variables indépendantes; par M. RODRIGUES, *licencié ès-sciences.*

On sait que le principe de la moindre action se réduit proprement à ce que *dans un système de corps soumis à des forces attractives ou répulsives, dans lequel, généralement, le principe des forces vives a lieu, la somme des forces vives instantanées acquises par tous les corps en passant d'une position donnée à une autre position aussi donnée, soit un maximum ou un minimum.*

Ce principe combiné avec celui des forces vives, peut servir à trouver les équations du mouvement du système dans chaque cas particulier ; mais on n'avait pas encore pensé, ce me semble, à employer dans ces solutions l'équation que donne le principe des forces vives, purement et simplement comme une équation de condition, et à la traiter comme telle par la méthode des multiplicateurs. Je suis parvenu ainsi, et en employant immédiatement les variables indépendantes du système, quelles qu'elles puissent être, aux équations générales du mouvement données dans *la Mécanique analytique*, (2^e. *part.*, *sect.* 4), et auxquelles M. La-

grange est arrivé, soit par des transformations directes de coordonnées, soit en employant pour ces transformations, des formules générales déduites du calcul des variations.

La méthode que j'expose offre un exemple assez remarquable de la théorie des multiplicateurs dans la méthode de *maximis* et *minimis*, et de la manière de déterminer entièrement ces multiplicateurs par les équations aux limites. Elle a aussi l'avantage d'introduire immédiatement dans le calcul, les deux fonctions T et V qui représentent, l'une la demi-somme des forces vives du système, et l'autre l'intégrale de la somme des momens.

Cette fonction T, quelles que soient les variables qu'on emploie, est toujours une fonction homogène du second degré par rapport à leurs dérivées, en sorte que ξ, φ, ψ, etc. étant ces variables, ξ', φ', ψ' leurs dérivées, on aura l'équation identique :

$$2T = \frac{dT}{d\xi'}\xi' + \frac{dT}{d\psi'}\psi' + \frac{dT}{d\varphi'}\varphi'.$$

Cela posé, le principe de la moindre action exige que l'intégrale $\int T dt$, soit un *maximum* ou un *minimum*, pourvu qu'on regarde la première et la dernière position du système comme données; en sorte que les variations des coordonnées soient nulles aux deux limites de cette intégrale. La variation $\delta\int T dt$, ou $\int \delta . T dt$ doit donc être égale à zéro. Mais le principe des forces vives donne l'équation de condition $T + V = H$, H étant une constante arbitraire.

Suivant l'esprit de la méthode des variations, il faut ajouter à l'intégrale $\int \delta . T dt$, celle-ci $\int \lambda dt\,(\delta T + \delta V)$, λ étant un multiplicateur variable et indéterminé, et regarder ensuite les variations comme indépendantes de l'équation de condition.

Alors l'équation du *minimum* est :

$$\int \delta . T dt + \lambda dt\,(\delta T + \delta V) = 0,$$

Il est nécessaire de faire varier aussi le tems; car, les coordonnées seulement ont des variations déterminées aux limites, tandis que celles du tems restent tout-à-fait arbitraires. Mais on peut d'abord ne pas le faire varier, ayant soin de substituer ensuite, au lieu des variations $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$, les expressions :

$$\delta\xi - \xi'\delta t, \quad \delta\psi - \psi'\delta t, \quad \delta\varphi - \varphi'\delta t,$$

et d'ajouter à la partie hors du signe, le terme $T\delta t$ (*).

(*) Voyez le supplément aux *Leçons sur le calcul des fonctions*. (22me. Leçon.)

Nous aurons donc ainsi :

$$o = \int dt\,((\lambda+1)\,\delta T + \lambda \delta V);$$

or,

$$\delta V = \frac{dV}{d\xi}\delta\xi + \frac{dV}{d\psi}\delta\psi + \frac{dV}{d\varphi}\delta\varphi,$$

$$\delta T = \frac{dT}{d\xi}\delta\xi + \frac{dT}{d\xi'}\frac{d\delta\xi}{dt} + \frac{dT}{d\varphi}\delta\varphi + \frac{dT}{d\varphi'}\frac{d\delta\varphi}{dt} + \frac{dT}{d\psi}\delta\psi + \frac{dT}{d\psi'}\frac{d\delta\psi}{dt}.$$

Faisant disparaître par l'intégration, par partie, les doubles signes $d\delta$, et ayant égard maintenant à la variation du tems, on aura cette transformée :

$$o = U + \int \{ \Xi(\delta\xi - \xi'\delta t) + \Psi(\delta\psi - \psi'\delta t + \Phi(\delta\varphi - \varphi'\delta t)\}\,dt,$$

dans laquelle :

$$U = T\delta t + (\lambda+1)\left(\frac{dT}{d\xi'}(\delta\xi - \xi'\delta t) + \text{etc...}\right);$$

ou bien : $$U = \frac{dT}{d\xi'}\delta\xi + \frac{dT}{d\psi'}\delta\psi + \frac{dT}{d\varphi'}\delta\varphi - (2\lambda+1)\,T\delta t,$$

$$\Xi = \frac{\lambda dV}{d\xi} + (\lambda+1)\frac{dT}{d\xi} - \frac{d.(\lambda+1)\dfrac{dT}{d\xi'}}{dt}.$$

etc....

On aura donc les équations indéfinies $\Xi = o$, $\Psi = o$, $\Phi = o$, auxquelles on joindra l'équation $T + V = H$, afin d'éliminer λ, et l'équation aux limites $U_2 - U_1 = o$; mais aux limites, les variations $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$ sont nulles ; l'équation se réduit donc à

$$(2\lambda+1)_1\,\delta t_1 - (2\lambda+1)_2\,\delta t_2 = o.$$

Et comme les variations δt_1, δt_2 sont indépendantes, on aura les équations :

$$(2\lambda+1)_1 = o, \qquad (2\lambda+1)_2 = o,$$

auxquelles la valeur de λ devra satisfaire. Maintenant si l'on multiplie les équations $\Xi = o$, $\Psi = o$, $\Phi = o$, par $d\xi$, $d\psi$, $d\varphi$, etc., qu'on les ajoute, on trouvera, toutes réductions faites, et en observant que

$$dT + dV = o,$$

$$(2\lambda+1)\,dT + Td(2\lambda+1) = o.$$

On tire de cette équation $2\lambda + 1 = \dfrac{K}{T}$, K étant une constante

arbitraire; on voit que pour satisfaire aux équations aux limites, il faudra faire $K=0$. On a donc simplement $2\lambda+1=0$, $\lambda=-\frac{1}{2}$. Substituant cette valeur dans les équations du mouvement, on aura les équations suivantes :

$$d.\frac{dT}{d\xi'}-\frac{dT}{d\xi}dt+\frac{dV}{d\xi}dt=0,$$

$$d.\frac{dT}{d\psi'}-\frac{dT}{d\psi}dt+\frac{dV}{d\psi}dt=0,$$

etc....

qui sont, comme on voit, celles de la *Mécanique analytique*.

Si les variables n'étaient pas indépendantes, et qu'il y eût par conséquent entre elles des équations de condition $M=0$, $N=0$, etc., il est évident que les précédentes seraient respectivement augmentées des termes $\mu\frac{dM}{d\xi}dt$, $\nu\frac{dN}{d\xi}dt$, etc., μ, ν, etc. étant des coefficiens indéterminés.

Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces, et sur la transformation d'une classe d'intégrales doubles, qui ont un rapport direct avec les formules de cette théorie ; par M. Rodrigues.

I.

Équations des lignes de courbure.

On appelle *ligne de courbure* sur une surface, une ligne telle que les normales à la surface menées par deux de ses points consécutifs, se coupent. Le point d'intersection est le centre de courbure, et la distance de ce point à la surface, le rayon de courbure.

Cela posé, soit ds un arc infiniment petit de cette ligne de courbure, dx, dy, dz seront les projections de cet élément sur les axes des coordonnées. Considérons les normales à la surface menées aux deux extrémités de l'arc ds ; appelons X, Y, Z, les cosinus des angles que la première normale fait avec les coordonnées ; $X+dX$, $Y+dY$, $Z+dZ$ seront les cosinus des angles formés par la seconde normale. Ces deux droites devant se rencontrer, si de leur point de rencontre comme centre et d'un rayon égal à l'unité, nous décrivons entre ces droites un petit arc de

cercle, il sera la mesure de l'angle qu'elles comprennent, et il est facile de voir que les projections de cet arc seront respectivement dX, dY, dZ. On voit aussi que ces projections seront à celles de l'élément ds, dans le rapport de l'unité au rayon de courbure. Désignons ce rayon par R, et nous aurons les trois équations suivantes, qui serviront à déterminer à-la-fois le rayon de courbure, et la ligne de courbure :

$$\frac{dX}{dx}=\frac{1}{R}, \qquad \frac{dY}{dy}=\frac{1}{R}, \qquad \frac{dZ}{dz}=\frac{1}{R}. \qquad (1)$$

Les deux équations de la ligne de courbure seront :

$$dXdy - dYdx = 0, \qquad dXdz - dZdx = 0;$$

entre les cosinus X, Y, Z, on a la relation :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

et par suite :

$$XdX + YdY + ZdZ = 0.$$

Cette dernière équation combinée avec les deux ci-dessus, sert à éliminer dX, dY, dZ, et l'on arrive à l'équation :

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Cette équation appartient à la surface que l'on considère ; il suffit donc pour la connaissance de la ligne de courbure, d'avoir égard à l'une de ses deux équations ; prenons l'équation :

$$dXdy - dYdx = 0,$$

on a :

$$dX=\left(\frac{dX}{dx}\right)dx+\left(\frac{dX}{dy}\right)dy, \qquad dY=\left(\frac{dY}{dx}\right)dx+\left(\frac{dY}{dy}\right)dy;$$

l'équation définitive sera donc

$$\left(\frac{dX}{dy}\right)dy^2+\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)-\left(\frac{dY}{dy}\right)\right]dydx-\left(\frac{dY}{dx}\right)dx^2=0. \qquad (2)$$

Cette équation différentielle du premier ordre, montant au second degré, la constante introduite par l'intégration, entrera au même degré dans l'équation finie. Cette constante aura donc deux valeurs, lorsqu'on voudra la déterminer par la condition que la courbe passe par un point donné. Il existe donc, en général, sur une surface deux lignes de courbure pour un point quelconque. Les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ correspondantes à ces deux lignes sont les racines

de l'équation (2), résolue par rapport au coefficient différentiel. Il est même clair que ces valeurs sont liées par une équation du premier degré à celles de la constante arbitraire ; d'où il résulte que si pour un point singulier, l'équation (2) devient identique, ou ce qui revient au même, si les racines de cette équation se présentent sous une forme indéterminée, il en sera de même pour les valeurs de la constante arbitraire, qui pourra dans ce cas avoir plus ou moins de deux valeurs réelles. Il peut donc y avoir plusieurs lignes de courbure pour cette classe de points singuliers, que M. Monge a considérés le premier, et qu'il a nommés *ombilics*. (Voyez l'analyse appliquée à la géométrie, page 27, édition 1809.) On peut en voir une théorie complette dans l'ouvrage de M. Dupin, *développemens de géométrie*.

II.

Je reviens maintenant à l'équation (2). Désignons, comme M. Monge, par p, q, r, s, t les cinq premiers coefficiens différentiels partiels de l'ordonnée z, on aura :

$$X = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad Y = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

puis

$$\left(\frac{dX}{dx}\right) = \frac{pqs-(1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \left(\frac{dX}{dy}\right) = \frac{pqt-(1+p^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\left(\frac{dY}{dx}\right) = \frac{pqr-(1+p^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \left(\frac{dY}{dy}\right) = \frac{pqs-(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), on trouve :

$$[(1+q^2)s-pqt]dy^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]dydx-(1+p^2)s+pqr=0. \quad (3)$$

Sous cette forme, notre équation coïncide avec celle que donne M. Monge dans l'*Analyse appliquée*, page 109.

Si l'on écrit ainsi cette équation :

$$Ady^2 + Bdydx - Cdx^2 = 0,$$

on aura entre A, B, C, la relation :

$$Ar = Bs + Ct. \quad (4)$$

M. Monge démontre que les deux lignes de courbure sont perpendiculaires, en rendant le plan tangent parallèle au plan des xy. On peut s'en dispenser de la manière suivante.

Soient y', y'' et z', z'' les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, et de $\frac{dz}{dx}$ pour

les deux courbes; la condition pour qu'elles soient perpendiculaires, est

$$1 + y'y'' + z'z'' = 0;$$

or, on a $z' = p + qy'$, $z'' = p + qy''$; l'équation devient :

$$1 + p^2 + (1 + q^2)y'y'' + pq(y' + y'') = 0;$$

or, on aura : $y'y'' = -\dfrac{C}{A}$, $y' + y'' = -\dfrac{B}{A}$,

et par suite : $A(1 + p^2) - pqB - C(1 + q^2) = 0$:

or $A = \dfrac{Bs + Ct}{r}$; on a donc :

$$(1 + p^2)(Bs + Ct) - pqrB - C(1 + q^2)r = 0,$$

ou bien : $B((1+p^2)s - pqr) - C((1+q^2)r - (1+p^2)t) = 0$,

équation identique par les valeurs de B et de C.

III.

Formules qui établissent une correspondance très-simple entre les deux lignes de courbure.

Désignons par d les différentielles relatives à l'une des lignes de courbure, et par δ les différentielles relatives à l'autre; en sorte que

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{\delta y}{\delta x};$$

L'équation $Ar = Bs + Ct$, donne :

$$r - s(y' + y'') + ty'y'' = 0,$$

ou substituant pour y', y'' les expressions ci-dessus :

$$r\delta x dz + s(dx\delta y + dy\delta x) + t\delta y dy = 0,$$

ou bien :

$$dx(r\delta x + s\delta y) + dy(s\delta x + t\delta y);$$

or, $\qquad dp = rdx + sdy; \quad dq = sdx + tdy$:

donc cette équation se change en

$$dx\delta p + dy\delta q = 0, \tag{5}$$

équation d'une simplicité remarquable, et qui, je crois, n'avait pas encore été donnée.

L'équation qui exprime la perpendicularité est :

$$1 + y'y'' + z'z'' = 0,$$

ou
$$dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = 0;$$

mais on a :
$$dz = pdx + qdy.$$

Substituant, on trouve :

$$dx\,(\delta x + p\,\delta z) + dy\,(\delta y + q\,\delta z) = 0.$$

Éliminant $\frac{dy}{dx}$ par l'équation (5), on a cette nouvelle équation des lignes de courbure, en changeant δ en d,

$$dp\,(dy + qdz) = dq\,(dx + pdz).$$

On trouve cette équation dans l'*Analyse appliquée*, page 115.

IV.

Si l'on compare l'équation :

$$r + s\,(y' + y'') + ty'y'' = 0,$$

à l'équation des tangentes conjuguées, donnée par M. Dupin, on les trouve identiques à la notation près ; il s'ensuit donc que les tangentes aux deux lignes de courbure, sont deux tangentes conjuguées. C'est en parlant de cette propriété que M. Dupin, après avoir donné l'équation des tangentes conjuguées, arrive à l'équation des lignes de courbure. L'équation (5) est celle des tangentes conjuguées ramenée à une forme plus simple, et telle qu'on peut la trouver ainsi qu'il suit. On sait que si l'on considère deux points infiniment voisins sur une surface, la tangente qui passe par ces deux points, et la ligne d'intersection des deux plans tangens, forment un systéme de tangentes conjuguées, d'après la définition de M. Dupin : or, soit

$$z' = px' + qy' + z - px - q;$$

l'équation du plan tangent, celle de l'intersection avec un plan infiniment voisin dans la direction $\frac{\delta y}{\delta x}$, sera :

$$(x' - x)\,\delta p + (y' - y)\,\delta q = 0.$$

Faisons

$$x' = x + dx, \qquad y' = y + dy,$$

les différentielles marquées par d, étant prises sur l'intersection des deux plans, et nous aurons la relation :

$$dx\,\delta p + dy\,\delta q = 0.$$

Si l'on met pour δp, δq les valeurs

$$\delta q = r\delta x + s\delta y,$$
$$\delta p = s\delta x + t\delta y,$$

on retrouve l'équation :

$$r + s\left(\frac{dy}{dx} + \frac{\delta y}{dx}\right) + t\,\frac{\delta y}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} = 0,$$

ou bien :

$$r + s\,(y' + y'') + ty'y'' = 0.$$

V.

Formules relatives aux rayons de courbure.

L'équation $\frac{1}{R} = \frac{dX}{dx}$, développée devient :

$$\frac{1}{R} = \left(\frac{dX}{dx}\right) + \left(\frac{dX}{dy}\right)\frac{dy}{dx}.$$

Si l'on élimine $\frac{dy}{dx}$, entre cette équation et l'équation (2), on aura :

$$\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dY}{dy}\right) - \left(\frac{dX}{dy}\right)\left(\frac{dY}{dx}\right)\right]R^2 - R\left[\left(\frac{dX}{dx}\right) + \left(\frac{dY}{dy}\right)\right] + 1 = 0\ (*).\quad (6)$$

(*) Substituant dans l'équation (6) pour $\left(\frac{dX}{dx}\right)$, $\left(\frac{dX}{dy}\right)$, $\left(\frac{dY}{dx}\right)$, $\left(\frac{dY}{dy}\right)$ leurs valeurs ; et faisant pour abréger :

$$g = rt - s^2,\quad h = (1+q^2)\,r - 2pqs + (1+p^2)\,t,\quad k^2 = 1 + p^2 + q^2,$$

elle devient :

$$gR^2 + hkR + k^4 = 0.$$

Résolvant cette équation, on parvient à l'expression des deux rayons R et R', donnée par M. Monge, page 112 de son analyse,

$$R = \frac{k}{2g}\left(-h \pm \sqrt{h^2 - 4k^2g}\right) = \frac{-2k^3}{h \pm \sqrt{h^2 - 4k^2g}}.$$

Dans l'hypothèse de $p = 0$, $q = 0$, $g = rt - s^2$, $h = r + t$, $k = 1$, et la valeur de R devient, comme on l'a trouvé dans l'article précédent, page 135, $\frac{2}{r + t \pm \sqrt{4s^2 + (r+t)^2}}$. N'ayant eu pour objet dans cet article, que de démontrer les théorèmes relatifs à la courbure d'une surface ou d'une courbe, je n'avais employé que cette dernière expression, qui est un cas particulier de l'expression générale du rayon de la sphère osculatrice en un point déterminé de la surface $dz = pdx + qdy$. Cette expression, $R = \frac{-2k^3}{h \pm \sqrt{h^2 - 4k^2g}}$ donne la longueur du rayon de courbure, au point (x, y, z), quelques soient les plans rectangulaires auxquels on ait rapporté la surface. H. C.

Soient R, R', les deux racines de cette équation, on aura ces expressions très-symétriques :

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\left(\frac{dX}{dx}\right)+\left(\frac{dY}{dy}\right),$$

$$\frac{1}{RR'}=\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dY}{dy}\right)-\left(\frac{dX}{dy}\right)\left(\frac{dY}{dx}\right).$$

VI.

Application des formules et des équations précédentes à la recherche des équations de plusieurs surfaces.

Nous allons montrer par plusieurs exemples, l'utilité des formules et des équations que nous avons établies ci-dessus, dans la solution de plusieurs problèmes de l'*Analyse appliquée* de M. Monge, relatifs à la courbure des surfaces.

Cherchons d'abord l'équation de la surface dans laquelle un des rayons serait infini, les équations :

$$\frac{1}{R}=\frac{dX}{dx}, \quad \frac{1}{R}=\frac{dY}{dy}, \quad \frac{1}{R}=\frac{dZ}{dz},$$

donneraient alors $dX=0$, $dY=0$, $dZ=0$. La troisième de ces équations est une conséquence des deux premières.

Les équations $dX=0$, $dY=0$, intégrées deviennent :

$$p=\alpha, \quad q=\beta.$$

Ce sont les équations de la ligne de courbure pour laquelle le rayon de courbure de la surface est infini. Elles marquent que pour tous les points de cette ligne de courbure, le plan tangent est le même, ce qui est le caractère distinctif des surfaces développables.

Les équations $p=\alpha$, $q=\beta$, différentiées donnent :

$$rdx+sdy=0, \quad sdx+tdy=0.$$

Eliminant $\frac{dy}{dx}$, entre ces deux équations, on aura un caractère indépendant de la direction particulière de la ligne de courbure. On trouve ainsi :

$$rt-s^2=0,$$

ce qui est l'équation des surfaces développables.

Des équations $p=\alpha$, $q=\beta$, on conclut :

$$dz=\alpha dx+\beta dy,$$

équation intégrable et qui donne :

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

On voit donc que la ligne de courbure est plane. Pour une même ligne de courbure, α, β, γ sont constans ; on a donc, en général, $\beta = \varphi\alpha$, $\gamma = \psi\alpha$, ce qui donne les deux intégrales premières :

$$q = \varphi p, \quad z - px - qy = \psi p.$$

Nous renvoyons pour de plus longs détails à l'*Analyse appliquée*.

VII.

Si l'on demande la surface dont un des rayons de courbure serait donné et égal à a, son équation aux différences partielles du second ordre s'obtiendra en mettant a au lieu de R dans l'équation (6). Mais on aura immédiatement les deux intégrales premières de cette équation, par la considération des lignes de courbure. En effet, les équations (1) s'intègrent dans ce cas, et donnent :

$$x - aX = \alpha,$$
$$y - aY = \beta,$$
$$z - aZ = \gamma,$$

α, β, γ sont constans et variables en même tems, on a donc alors $\beta = \psi\gamma$, $\alpha = \varphi\gamma$, ou :

$$x - aX = \varphi(z - aZ), \quad y - aY = \psi(z - aZ).$$

Les trois équations ci-dessus combinées avec celle-ci :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

donnent : $(x - \varphi\gamma)^2 + (y - \varphi\gamma)^2 + (z - \gamma)^2 = a^2$;

ce qui montre que la surface cherchée est l'enveloppe de l'espace parcouru par une sphère, dont le rayon serait constant et égal à a, et dont le centre décrirait une courbe arbitraire dans ses deux projections.

VIII.

Si une des lignes de courbure devait toujours être parallèle à un plan donné, dont l'équation fût par exemple $y = ax$, ce qui est toujours permis ; alors pour cette ligne on aurait les équations :

$$dy - adx = 0,$$
$$dXdy - dYdx = 0,$$

qui s'intégreraient ainsi :

$$y - ax = \alpha,$$
$$Y - aX = \beta,$$

ce qui donnerait une des intégrales premières $y - aX = \varphi(y - ax)$; ensuite l'équation (5) :

$$dy\,\delta q + dx\,\delta p = 0.$$

s'intégrerait aussi, et l'on aurait pour la seconde ligne de courbure, l'équation :

$$p + aq = \gamma,$$

ou bien : $$X + aY + \gamma Z = 0.$$

Cette équation différentiée de nouveau donne :

$$dX + a dY + \gamma dZ = 0.$$

On peut chasser dX, dY, dZ par les équations (1), et l'on trouve alors :

$$dx + a dy + \gamma dz = 0;$$

intégrant $$x + ay + \gamma z = \theta,$$

équation d'un plan, la seconde ligne de courbure est donc plane comme la première.

On aura : $$\theta = F(\gamma).$$

Substituant pour γ la valeur $p + aq$, on obtient cette seconde intégrale première :

$$x + pz + a(y + qz) = F(p + aq).$$

La recherche de l'intégrale finie, exige des développemens étrangers à mon sujet, et qui ne peuvent trouver place ici.

IX.

Une surface très-remarquable est celle dont les deux rayons de courbure sont égaux et de signe contraire, c'est-à-dire directement opposés. Pour une pareille surface, on doit avoir :

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 0;$$

son équation aux différences partielles sera donc :

$$\left(\frac{dX}{dx}\right) + \left(\frac{dY}{dy}\right) = 0.$$

Sous cette forme, on reconnaît sur-le-champ que cette surface est celle dont l'aire est un *minimum*. En effet, puisque

$$X = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad Y = -\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

on a : $$X = -\frac{d.\sqrt{1+p^2+q^2}}{dp}, \qquad Y = -\frac{d.\sqrt{1+p^2+q^2}}{dq}.$$

Or, l'équation de la surface qui rend *minimum* la double intégrale $\iint V dx dy$, V ne contenant que p et q, est comme on sait :

$$\left(\frac{d.\left(\frac{dV}{dp}\right)}{dx}\right) + \left(\frac{d.\left(\frac{dV}{dq}\right)}{dy}\right) = 0.$$

Si $V = \sqrt{1+p^2+q^2}$, et dans ce cas, la double intégrale $\iint V dx dy$, représente l'aire de la surface ; l'équation du *minimum* sera :

$$\left(\frac{dX}{dx}\right) + \left(\frac{dY}{dy}\right) = 0.$$

X.

Il me reste enfin à parler de la surface dont les deux rayons de courbure sont égaux et dirigés dans le même sens.

Pour trouver son équation aux différences partielles, il faut exprimer que l'équation (6) a ses deux racines égales. On aura ainsi :

$$\left[\left(\frac{dX}{dx}\right) + \left(\frac{dY}{dy}\right)\right]^2 - 4\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dY}{dy}\right) - \left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dY}{dx}\right)\right] = 0,$$

ou mettant pour les différences partielles indiquées leurs valeurs :

$$[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]^2 - 4[1+p^2+q^2][rt-s^2] = 0. \quad (7)$$

Telle est l'équation que M. Monge intègre dans son ouvrage, pag. 171, et qu'il parvient à représenter par le système de trois équations, entre lesquels un seul paramètre doit être éliminé.

Nous pouvons lui donner une autre forme ; en effet, la première équation ci-dessus peut s'écrire ainsi :

$$\left[\left(\frac{dX}{dx}\right) - \left(\frac{dY}{dy}\right)\right]^2 + 4\left(\frac{dX}{dy}\right)\left(\frac{dY}{dx}\right) = 0,$$

ou bien:

$$[(1+q^2)r-(1+p^2)t]^2+4[(1+q^2)s-pqt][(1+p^2)s-pqr]=0.$$

Si comme dans le §. II, page 164 de ce cahier, on représente les quantités comprises entre les crochets dans cette équation, respectivement par B, A, C, l'équation deviendra :

$$B^2+4AC=0;$$

or, la relation $Ar=Bs+Ct$, donne $C=\frac{Ar-Bs}{t}$; l'équation $B^2+4AC=0$, peut donc se transformer en celle-ci :

$$B^2+\frac{4A(Ar-Bs)}{t}=0,$$

ou $$\frac{1}{t^2}[Bt-2As]^2+\frac{4A^2}{t^2}[rt-s^2]=0.$$

D'ailleurs l'équation (7) montre que $rt-s^2$ est une quantité essentiellement positive. On ne peut donc satisfaire à cette équation qu'en posant $A=0$, $B=0$, ou bien $rt-s^2=0$. Nous examinerons ce dernier cas particulier plus bas.

Les équations $A=0$, $B=0$, sont celles que M. Monge intègre d'abord, comme une solution particulière de l'équation (7), et il trouve que la sphère seule satisfait à ces deux équations.

Si nous posons $rt-s^2=0$, l'équation se réduit à :

$$r+t+(q\sqrt{r}-p\sqrt{t})^2=0:$$

or, je dis que ces deux équations :

$$rt-s^2=0,$$
$$r+t+(q\sqrt{r}-p\sqrt{t})^2=0,$$

n'ont de solutions réelles que $r=0$, $t=0$, $s=0$; équations qui ne conviennent qu'à un plan.

Car l'équation $rt=s^2$ exige que r et t soient de mêmes signes; or, si r et t sont tous deux positifs, la seconde équation ne sera pas satisfaite, puisqu'elle sera la somme de trois quantités positives: si au contraire, r et t sont négatifs, le carré $(q\sqrt{r}-p\sqrt{t})^2$ devient négatif; l'équation n'est pas plus satisfaite : il faut donc poser $r=0$, $t=0$, et par suite $s=0$. Nous voyons donc que la sphère et le plan sont les seules surfaces dont les deux courbures soient égales dans tous leurs points, et encore peut-on ne parler que de la sphère, puisque le plan peut-être considéré comme une sphère d'un rayon infini.

XI.

Les équations $A=0$, $B=0$, reviennent évidemment à celles-ci : $\left(\frac{dY}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{dX}{dy}\right)=0$. Or, il est très-facile de démontrer que ces équations sont celles qui expriment que la surface cherchée a dans tous ses points une sphère osculatrice : on sait, en effet, que pour qu'une sphère soit osculatrice d'une surface donnée, il faut que les quatre élémens de cette sphère remplissent six conditions qui résultent de l'égalité des coordonnées, et de leurs premières et secondes différences dans les deux surfaces. On pourra donc éliminer ces quatre élémens, et l'on aura deux équations pour exprimer la possibilité qu'une surface soit osculée par une sphère. Il s'agit d'arriver directement à ces deux équations : pour cela, soient a, b, c, r les coordonnées du centre et le rayon de la sphère osculatrice, la normale étant commune aux deux surfaces, on aura :

$$X=\frac{x-a}{r}, \quad Y=\frac{y-b}{r};$$

et comme ces équations ne contiennent que les premières différences p et q, on peut les différentier une fois, sans que l'égalité soit troublée ; on aura donc :

$$\left(\frac{dX}{dy}\right)=0, \quad \left(\frac{dY}{dx}\right)=0.$$

Ces deux équations indépendantes des élémens a, b, c, r, sont les deux équations de condition cherchées.

XII.

Théorémes relatifs à la transformation des intégrales doubles.

L'expression que nous avons trouvée plus haut :

$$\frac{1}{RR'}=\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dY}{dy}\right)-\left(\frac{dX}{dy}\right)\left(\frac{dY}{dx}\right),$$

a un rapport manifeste avec la formule qui sert à transformer les intégrales doubles. En effet, si dans l'intégrale $\iint V dx dy$, on veut changer les variables x, y dans les variables u et t, on effectue d'abord la transformation algébrique dans la fonction V, puis on substitue à l'élément différentiel $dxdy$, celui-ci : .

$$\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}\frac{dy}{du}\right)dudt.$$

Or les cosinus X et Y qui sont fonctions des variables indépendantes x et y, peuvent eux-mêmes être considérés comme deux variables indépendantes, dont x et y seraient fonctions; mais alors une double intégrale telle que $\iint VdXdY$, relatives aux variables X et Y, équivaut à celle-ci :

$$\iint V\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dY}{dy}\right)-\left(\frac{dX}{dy}\right)\left(\frac{dY}{dx}\right)\right]dxdy,$$

et réciproquement.

Or l'expression : $\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dY}{dy}\right)-\left(\frac{dX}{dy}\right)\left(\frac{dY}{dx}\right)$, développée donne : $\frac{1}{RR'}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$, en sorte que la double intégrale $\iint\frac{V(rt-s^2)\,dxdy}{(1+p^2+q^2)^2}$, équivaut à celle-ci : $\iint VdXdY$.

Faisons $V=U(1+p^2+q^2)^2$; nous aurons alors le théorême suivant :

L'intégrale double $\iint U(rt-s^2)\,dxdy$, prise sur une surface quelconque est égale à celle-ci : $\iint\frac{UdXdY}{(1-X^2-Y^2)^2}$, prise entre les limites correspondantes à celles de la première.

Comme on a $p=\frac{-X}{\sqrt{1-X^2-Y^2}}$, $q=\frac{-Y}{\sqrt{1-X^2-Y^2}}$, il est clair que si U dans la première intégrale ne contient que p et q, la transformation s'effectuera de même, quelle que soit l'équation de la surface sur laquelle on prend l'intégrale : on trouve ainsi ce second théorême.

L'intégrale double $\iint U(rt-s^2)\,dxdy$, U ne contenant que p et q, est indépendante de l'équation qui peut exister entre les coordonnées x, y, z, elle est égale à $\iint\frac{UdXdY}{(1-X^2-Z^2)^2}$, U ne contenant alors que X, Y.

L'intégrale $\iint U(rt-s^2)\,dxdy$ ne doit donc varier que par ses limites. La variation de cette intégrale ne doit donc pas contenir de termes affectés du double signe, c'est ce que nous allons vérifier.

Faisons $T=U(rt-s^2)$. On sait que dans le développement de la variation $\delta\iint Tdxdy$, la quantité qui se trouve sous le double signe, multipliée par $dxdy\,\delta z$, est :

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)-\left(\frac{d\left(\frac{dT}{dp}\right)}{dx}\right)-\left(\frac{d\left(\frac{dT}{dq}\right)}{dy}\right)$$
$$+\left(\frac{d^2\left(\frac{dT}{dr}\right)}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2\left(\frac{dT}{ds}\right)}{dxdy}\right)+\left(\frac{d^2\left(\frac{dT}{dt}\right)}{dy^2}\right), \text{ etc.}$$

Ici T ne contient que p, q, r, s, t. Cette quantité peut donc s'écrire ainsi :

$$\frac{d.\left[\left(\frac{d\left(\frac{dT}{dr}\right)}{dx}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{d\left(\frac{dT}{ds}\right)}{dy}\right)-\left(\frac{dT}{dp}\right)\right]}{dx}$$
$$+\frac{d.\left[\left(\frac{d\left(\frac{dT}{dt}\right)}{dy}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{d\left(\frac{dT}{ds}\right)}{dx}\right)-\left(\frac{dT}{dq}\right)\right]}{dy},$$

ou bien :
$$\left(\frac{dA}{dx}\right)+\left(\frac{dB}{dy}\right),$$

en représentant par A, la quantité entre les crochets, différentiée par rapport à x, et par B celle que l'on différentie par rapport à y.

Or, U n'étant fonction que de p et de q, on aura :

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)=Ut,\quad \left(\frac{dT}{ds}\right)=-2Us,\quad \left(\frac{dT}{dt}\right)=Ur,$$
$$\left(\frac{dT}{dp}\right)=(rt-s^2)\left(\frac{dU}{dp}\right),\quad \left(\frac{dT}{dq}\right)=(rt-s^2)\left(\frac{dU}{dq}\right),$$
$$\left(\frac{dU}{dx}\right)=\left(\frac{dU}{dp}\right)r+\left(\frac{dU}{dq}\right)s,\quad \left(\frac{dU}{dy}\right)=\left(\frac{dU}{dp}\right)s+\left(\frac{dU}{dq}\right)t.$$

Substituant ces valeurs dans A et B, on les trouve identiquement nulles, quel que soit U.

XIII.

Il s'ensuit donc que la variation $\delta\iint U(rt-s^2)\,dxdy$, ne contient que les termes relatifs aux limites de l'intégrale. Ainsi l'intégrale sera la même pour deux surfaces dans lesquelles les limites de cette intégrale seront les mêmes. Il ne résulte pas delà que dans

tous les cas, la somme des élémens $U(rt-s^2)dxdy$, sera aussi la même pour les surfaces. Car cette somme cesse d'être représentée par l'intégrale $\iint U(rt-s^2)dxdy$, si la surface sur laquelle on la prend n'a pas une courbure uniforme, de manière que l'élément de l'intégrale devienne nul, indéterminé, ou même infini en certains points. Cette observation est importante, et empêche de tomber dans des paradoxes frappans. Ainsi, pour en donner un exemple très-général, concevons qu'une portion de surface fermée, telle qu'une calotte sphérique, soit circonscrite par une surface développable; les limites de l'intégrale pour ces deux surfaces seront bien les mêmes, et pourtant il est clair que l'intégrale $\iint U(rt-s^2)dxdy$ appliquée à une portion quelconque d'une surface développable est nulle, puisqu'on a alors $rt-s^2=0$; tandis qu'elle ne le sera pas pour la surface inscrite à la surface développable. Mais examinons attentivemment la marche de l'intégrale sur les deux surfaces. Sur la surface inscrite, par une direction quelconque, on arrive toujours d'une limite à l'autre sans discontinuité: au contraire, sur la surface développable, si l'on se dirige sur une génératrice de cette surface pour passer d'une limite à l'autre, on n'y arrive jamais. La seule manière de lier les deux limites entre elles, pour une direction quelconque de la surface, serait de concevoir la surface terminée à l'infini par une autre portion de surface qui lui serait aussi inscrite; mais alors la double intégrale passe évidemment par une indétermination complette, lorsqu'on l'applique aux points de cette seconde surface. Cette considération me paraît d'autant plus exacte, que si l'on conçoit la surface développable circonscrite à une autre calotte, ayant sa courbure dans le même sens que la première, l'intégrale appliquée à-la-fois à la surface développable et à cette seconde calotte sera la même que pour la première calotte. Car par la propriété connue des surfaces développables, les normales qui terminent la première surface inscrite, seront parallèles à celles qui terminent la seconde; les limites des intégrales pour ces deux calottes seront les mêmes; et comme je suppose leur courbure uniforme, les valeurs de ces intégrales seront rigoureusement les mêmes; d'ailleurs l'intégrale sera nulle pour toute la portion de surface développable qui sépare les deux calottes.

XIV.

Si l'on fait $U=(1+p^2+q^2)^{-\frac{3}{2}}$, la double intégrale $\iint U(rt-s^2)dxdy$, devient $\iint\frac{(rt-s^2)\,dxdy}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$; elle représente la somme des élémens d'une surface divisés par le produit

des rayons de courbure correspondans (*). Par notre théorême, on peut la remplacer par la double intégrale $\iint \frac{UdXdY}{(1-X^2-Y^2)^2}$, qui devient alors $\iint \frac{dXdY}{\sqrt{1-X^2-Y^2}}$. Cette dernière exprime l'aire d'une sphère, dont l'équation serait :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Si l'on observe maintenant qu'à chaque élément pris sur la surface générale, correspond un élément de cette sphère, dont les coordonnées sont les cosinus des angles formés par la normale à la première surface avec les axes des coordonnées, on est conduit à la construction suivante.

Concevons une sphère d'un rayon égal à l'unité; puis faisons mouvoir le rayon de cette sphère, de manière qu'il soit successivement parallèle à toutes les normales de la portion de surface sur laquelle on veut prendre l'intégrale, l'aire sphérique décrite par l'extrémité de ce rayon mobile, sera la valeur de l'intégrale cherchée (**).

XV.

Cette construction qui est fort simple, montre d'une manière très-satisfaisante la marche de l'intégrale sur la surface. En effet, si dans toute l'étendue de surface que l'on considère, la courbure varie uniformément, en sorte que la normale ne passe jamais deux fois par la même direction, le rayon mobile ne rebroussera donc jamais dans sa marche, et alors la valeur de l'intégrale sera précisément l'aire sphérique comprise entre le deux courbes que tracerait le rayon mobile, si dans son mouvement il n'était parallèle

---

(*) M. Poisson ayant reconnu que la variation de cette intégrale était nulle, m'engagea à en calculer la valeur pour un ellipsoïde entier; je la trouvai égale à 4π. Depuis je me suis occupé d'en trouver la valeur générale, et j'ai été conduit alors aux théorêmes que j'expose ici.

(**) M. Binet démontre ce théorême de M. Rodrigues, par une considération géométrique fort simple. Désignant par ds et ds', les élémens des deux lignes de courbure principales, qui se coupent au même point à angle droit (théorême de M. Monge); l'élément de la surface peut être représenté par $dsds'$, et la double intégrale sera $\iint \frac{ds}{R} \cdot \frac{ds'}{R'}$. Or, les fractions $\frac{ds}{R}$ et $\frac{ds'}{R'}$ sont les élémens de deux cercles décrits d'un rayon égal à l'unité et perpendiculaires entre eux; leur produit est donc l'élément de la sphère du même rayon, et par conséquent l'intégrale représente l'air d'une portion de cette sphère. (Extrait du Bulletin de la société philomatique, pag. 36, année 1815.)

qu'aux normales qui passent par les deux courbes limites sur la surface. Dans ce cas, il est bien vrai de dire que si pour deux surfaces, les limites de l'intégrale sont les mêmes, l'intégrale sera aussi la même, parce qu'alors la courbure des deux surfaces est uniforme. Si, au contraire, la courbure de l'une de ces deux surfaces éprouve des changemens brusques, si deux normales différentes peuvent avoir la même direction absolue, alors le rayon mobile rebroussant chemin, aura décrit une aire sphérique plus grande que celle comprise entre les deux courbes sphériques, dont je viens de parler plus haut, la valeur de l'intégrale ne sera donc pas la même pour les deux surfaces. Si l'une de ces deux surfaces est développable, le rayon mobile conservera la même position pour tous les points de la même génératrice. Cette position ne changera qu'en passant d'une génératrice à celle qui lui est consécutive; de sorte que le rayon mobile décrira simplement une courbe, au lieu de décrire une portion de sphère, si petite qu'elle soit. La valeur de l'intégrale sera donc nulle.

Tout ceci s'accorde parfaitement avec ce que nous avons dit, §. XIII.

XVI.

Veut-on avoir la valeur de l'intégrale pour toute une surface fermée et d'une courbure uniforme, comme un ellipsoïde, par exemple; il est évident qu'alors le rayon mobile décrit la sphère entière, dont le rayon est l'unité. On a donc dans ce cas :

$$\iint \frac{(rt - s^2)\, dx dy}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} = 4\pi.$$

Si la surface, semblable à celle d'un anneau, est doublement convexe et fermée, le rayon mobile décrit deux fois la sphère :

$$\iint \frac{(rt - s^2)\, dx dy}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} = 8\pi.$$

S'il s'agit d'une surface de révolution, et qu'on veuille prendre l'intégrale entre deux plans perpendiculaires à l'axe. Il est clair que l'aire sphérique qui en est la valeur, sera une zône d'une hauteur égale à la différence des cosinus des angles que font avec l'axe de révolution, les normales menées à la surface aux deux sections limites : soient a et a' ces deux cosinus, on aura :

$$\iint \frac{(rt - s^2)\, dx dy}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi\,(a' - a).$$

XVII.

Considérons séparement les surfaces du second degré, les intégrales étant prises dans toute leur étendue. Pour l'ellipsoïde entier, la valeur de l'intégrale sera 4π; pour les deux paraboloïdes, l'intégrale n'est que 2π, car il est évident que si le plan tangent à ces surfaces peut prendre toutes les directions, il ne prend jamais deux fois la même; l'angle de la normale avec l'axe ne varie que de 100°, et le rayon mobile ne décrit donc que la moitié de la sphère.

Pour les deux hyperboloïdes, on est ramené à évaluer une aire sphérique, dont la quadrature dépend de la rectification des sections coniques. Mais s'ils sont de révolution, l'intégrale s'obtient aisément par ce que nous avons démontré, en général, pour les surfaces de révolution.

Considérons l'hyperboloïde à une nappe, et cherchons l'intégrale seulement pour la moitié de cette surface, l'hyperboloïde étant censé coupé par le plan perdiculaire à l'axe passant par le centre. Les deux plans limites sont ici, 1°. ce plan, qui partage l'hyperboloïde en deux parties égales et symétriques; 2°. un plan parallèle à celui-là, mais à l'infini, et qui coupe suivant une même courbe, l'hyperboloïde et le cône asymptote. Soit e l'excentricité, on aura pour les valeurs des deux cosinus a et a', $a=0$, $a'=\frac{1}{e}$.

La valeur de l'intégrale sera donc $\frac{2\pi}{e}$ et $\frac{4\pi}{e}$ pour l'hyperboloïde entier.

Pour l'hyperboloïde de révolution à deux nappes, on a:

$$a=1, \qquad a'=\frac{\sqrt{e^2-1}}{e},$$

la forme de la surface montre qu'au lieu de la formule $2\pi(a'-a)$, c'est la formule $2\pi(a-a')$ qu'il faut employer; on aura ainsi pour le demi-hyperboloïde:

$$2\pi\left(\frac{e-\sqrt{e^2-1}}{e}\right), \text{ et } \quad 4\pi\left(\frac{e-\sqrt{e^2-1}}{e}\right)$$

pour l'hyperboloïde entier.

J'ai vérifié tous ces divers résultats relatifs aux surfaces du second degré, par l'intégration directe de la formule

$$\iint\frac{(rt-s^2)\,dxdy}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Addition aux recherches précédentes ; par M. Rodrigues.

Le théorême de calcul intégral, auquel nous ont conduits les formules relatives aux lignes de courbure, peut être démontré directement de la manière suivante.

L'intégrale double $\int\int U(rt-s^2)\,dxdy$, peut s'écrire ainsi :

$$\int\int U\left(\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy}-\frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx}\right)dxdy.$$

Sous cette forme on voit sur-le-champ qu'elle équivaut à l'intégrale double $\int\int Udpdq$, relative aux variables p, q; et que si U n'est fonction que de p et q, cette intégrale ne dépend que de ses limites.

Maintenant on peut changer les variables p, q, en d'autres qui en soient des fonctions données. Ainsi on peut leur substituer les variables X, Y, qui sont les cosinus des angles que la normale fait avec les axes des x et des y.

On aura dans ce cas :

$$\int\int U(rt-s^2)dxdy=\int\int Udpdq=\int\int U\left(\frac{dp}{dX}\frac{dq}{dY}-\frac{dp}{dY}\frac{dq}{dX}\right)dXdY;$$

mais $$p=\frac{-X}{\sqrt{1-X^2-Y^2}},\quad q=\frac{-Y}{\sqrt{1-X^2-Y^2}}:$$

on trouve ainsi, comme nous y sommes déja parvenus :

$$\int\int U(rt-s^2)\,dxdy=\int\int\frac{UdXdY}{(1-X^2-Y^2)^2}.$$

De pareilles considérations s'appliquent aux intégrales doubles, composées d'une manière analogue en différences partielles d'ordres supérieurs. Si nous posons, comme M. Monge,

$$dr=udx+\mathfrak{u}dy,$$
$$ds=\mathfrak{u}dx+wdy,$$
$$dt=wdx+vdy,$$

nous trouverons que l'intégrale double :

$$\int\int U(uw-w^2)\,dxdy=\int\int\frac{UdX'dY'}{(1-X'^2-Y'^2)^2}.$$

Les variables X', Y' étant données par ces équations :

$$X' = \frac{-r}{\sqrt{1+r^2+s^2}}, \qquad Y' = \frac{-s}{\sqrt{1+r^2+s^2}};$$

et que si U ne contient que r, s, l'intégrale $\iint U(uw - m^2)\,dxdy$ ne varie que par ses limites : ce que l'on peut aussi vérifier par le calcul des variations.

D'ailleurs, tous ces divers théorêmes, ainsi que les vérifications qu'on en pourrait faire par le calcul des variations, sont renfermés dans l'analyse suivante.

Soient P, Q, deux fonctions quelconques des variables x, y; faisons :

$$dP = Rdx + Sdy,$$
$$dQ = S'dx + Tdy.$$

S et S' seront égaux, si $Pdx + Qdy$ est une différentielle exacte.

Cela posé, il est évident que l'intégrale $\iint U(RT - SS')\,dxdy$, revient à celle-ci : $\iint UdPdQ$; et que si U ne contient que P et Q, cette intégrale ne varie que par ses limites.

Il suffit pour vérifier la seconde partie de ce théorême, d'attribuer à une des deux fonctions P, Q, à P par exemple, une variation arbitraire δP, et de voir la variation de l'intégrale double $\iint U(RT - SS')\,dxdy$, ne contient que des termes relatifs aux limites. Or il est facile de voir par la méthode des variations, que la partie de la variation $\delta \iint U(RT - SS')\,dxdy$, contenue sous le double signe intégral, se réduit à :

$$(RT - SS')\frac{dU}{dP} - \frac{d.UT}{dx} + \frac{d.US'}{dy}.$$

Or, si l'on développe cette expression, on la trouve identiquement nulle, en observant que :

$$\frac{d.UT}{dx} = T\left(\frac{dU}{dP}.R + \frac{dU}{dQ}S'\right) + U\frac{dT}{dx},$$
$$\frac{d.US'}{dy} = S'\left(\frac{dU}{dP}S + \frac{dU}{dQ}T\right) + U\frac{dS'}{dy},$$
$$\frac{dT}{dx} = \frac{dS'}{dy}.$$

Prenons de nouvelles variables u, t, qui soient des fonctions

données de P, Q, on aura :

$$\iint U(RT-SS')\,dxdy=\iint U\left(\frac{dP}{du}\frac{dQ}{dt}-\frac{dP}{dt}\frac{dQ}{du}\right)dudt;$$

si l'on fait :

$$U=\frac{1}{(1+P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}},\quad u=\frac{-P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}},\quad t=\frac{-Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}},$$

on trouve ce résultat très-général :

$$\iint\frac{(RT-SS')\,dxdy}{(1+P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}=\iint\frac{dudt}{\sqrt{1-u^2-t^2}}.$$

Si $Pdx+Qdy$ est une différentielle exacte, soit Z l'intégrale de cette différentielle ; alors l'intégrale ci-dessus, devient :

$$\iint\frac{(RT-SS')\,dxdy}{(1+P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}:$$

elle exprime la somme des élémens de la surface, dont l'ordonnée est Z, divisés par le produit des deux rayons de courbure ; u, t sont les cosinus des angles formés par la normale à cette surface, avec les axes des x et des y.

Par conséquent toutes les intégrales doubles, telles que :

$$\iint\frac{(rt-s^2)\,dxdy}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\quad\iint\frac{(uw-m^2)\,dxdy}{(1+r^2+s^2)^{\frac{3}{2}}},\quad\iint\frac{(mv-w^2)\,dxdy}{(1+s^2+t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

expriment au fond la même chose, et se ramènent toutes à la quadrature de la sphère.

Si l'on fait $U=\dfrac{1}{\sqrt{1-P^2-Q^2}}$, $u=P$, $t=Q$, on trouve :

$$\iint\frac{(RT-SS')\,dxdy}{\sqrt{1-P^2-Q^2}}=\iint\frac{dudt}{\sqrt{1-u^2-t^2}},$$

ce qui fournit une nouvelle classe d'intégrales doubles qui se ramènent à la quadrature de la sphère.

Les combinaisons de différences partielles, telle que $RT-SS'$, jouissent de propriétés très-importantes dans le calcul des équations aux différences partielles. Il est singulier, qu'on n'ait pas encore aperçu l'analogie qu'elles ont avec les formules par lesquelles on transforme les intégrales doubles, et les théorêmes qu'on peut en déduire relativement à la courbure des surfaces.

Problême sur le pendule simple; par M. Deflers, licencié ès-sciences.

Supposons un pendule simple à l'état de repos ; donnons au point de suspension, assujéti d'ailleurs à se mouvoir sur une ligne horisontale, une impulsion qui lui communique suivant cette droite une vîtesse connue, et proposons-nous de déterminer le mouvement que prendra le pendule.

Il est évident que ce mouvement aura lieu dans le plan vertical qui comprend la direction de la vîtesse initiale, et qu'il revient à celui du systême de deux points dont l'un, astreint à rester sur une ligne horisontale, n'est d'ailleurs soumis à aucune force accélératrice, et dont l'autre, animé par la pesanteur, doit en outre rester à une distance constante du premier. Pour le déterminer, rapportons ces points à deux axes rectangulaires des x et des y ; le premier étant pris sur la droite même que décrit le point de suspension, le second, dirigé dans le sens de la pesanteur, coïncidera avec la direction initiale du pendule. Cela posé, soient x et x', y' les coordonnées de ces points au bout du tems t : conformément à l'énoncé du principe de d'Alembert, cherchons les vîtesses perdues par chaque point, en vertu de la liaison du systême. Elles sont, pour le premier,

$$-\frac{d^2x}{dt}, \text{ pour le second, } -\frac{d^2x'}{dt},\ gdt-\frac{d^2y'}{dt},$$

et le principe des vîtesses virtuelles donne pour équation d'équilibre :

$$\frac{d^2x}{dt}\delta x+\frac{d^2x'}{dt}\delta x'+\left(\frac{d^2y'}{dt}-gdt\right)\delta y'=0:$$

de plus, la distance des points proposés étant constante et égale à la longueur du pendule que je représente par l, on a :

$$(x-x')^2+y'^2=l^2, \qquad (1)$$

ce qui donne :

$$(x-x')(\delta x-\delta x')+y'\delta y'=0.$$

Éliminant entre cette équation et celle d'équilibre l'une quelconque des variations δx, $\delta x'$, $\delta y'$, l'équation se partagera dans les deux

suivantes :

$$y'\frac{d^2x}{dt}-\left(\frac{d^2y'}{dt}-gdt\right)(x-x')=0, \qquad (2)$$

$$y'\frac{d^2x'}{dt}+\left(\frac{d^2y'}{dt}-gdt\right)(x-x')=0, \qquad (3)$$

qui jointes à (1) completteront la solution du problême, puisque ces trois équations comprennent les quatre quantités x, x', y' et t, et qu'on connaît d'ailleurs la trajectoire du premier point.

Ajoutant (2) et (3), on a : $\frac{d^2x}{dt}+\frac{d^2x'}{dt}=0$, équation qui s'intègre et donne $x+x'=ct+c'$, mais à l'origine :

$$t=0,\quad x'=0,\quad x=0,\quad \frac{dx'}{dt}=0,\quad \frac{dx}{dt}=a,$$

a représentant la vîtesse imprimée au point de suspension : l'équation finie devient donc $x+x'=at$. Pour obtenir une nouvelle intégrale, retranchons (3) de (2), nous aurons :

$$y'\left(\frac{d^2x}{dt}-\frac{d^2x'}{dt}\right)-2\left(\frac{d^2y'}{dt}-gdt\right)(x-x')=0,$$

équation que nous ramènerons à ne contenir que deux variables, en changeant de coordonnées et déterminant le second des points proposés, par l'angle θ que la direction du pendule fait avec la verticale menée par le point de suspension, et l'abscisse x de ce point. En effet, cette transformation donne :

$$y'=l\cos\theta,\qquad x-x'=l\sin\theta,$$

et change l'équation précédente en

$$l\cos\theta\,(l\cos\theta d^2\theta-l\sin\theta d\theta^2)+2l\sin\theta\,(gdt^2+l\cos\theta d\theta^2+l\sin\theta d^2\theta)=0,$$

ou, divisant tout par l, développant et réduisant :

$$l(1+\sin^2\theta)\,d^2\theta+l\sin\theta\cos\theta d\theta^2+2g\sin\theta dt^2=0: \qquad (a)$$

posant $d\theta=\theta' dt$, d'où $d^2\theta=d\theta' dt=\frac{\theta' d\theta' dt^2}{d\theta}$, il vient :

$$\left\{\begin{array}{l} l(1+\sin^2\theta)\,\theta' d\theta'+l\sin\theta\cos\theta.\theta'^2 d\theta \\ +2g\sin\theta d\theta=\frac{1}{2}d.\{l(1+\sin^2\theta)\,\theta'^2-4g\cos\theta\}=0. \end{array}\right.$$

Cette dernière équation a pour intégrale :

$$l(1+\sin^2\theta)\,\theta'^2-4g\cos\theta=c,$$

ou remettant pour θ' sa valeur, $l(1+\sin^2\theta)d\theta^2 - 4g\cos\theta dt^2 = cdt^2$. Déterminons la constante c: pour cela remarquons que des équations :

$$x+x'=at\,,\quad \text{et}\quad x-x'=l\sin\theta\,,$$

résultent les suivantes :

$$2x=at+l\sin\theta,\quad 2x'=at-l\sin\theta,\quad 2\frac{dx'}{dt}=a-l\cos\theta\frac{d\theta}{dt},$$

qui donnent à l'origine $\theta=0$, $\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{a}{l}$; d'où l'on tire, $c=\dfrac{a^2-4gl}{l}$. Nous avons donc pour remplacer les équations (1), (2) et (3), le système suivant :

$$y'=l\cos\theta\,,\quad (4)\qquad 2x'=at-l\sin\theta\,,\quad (5)$$

$$2x=at+l\sin\theta\,,\ (6)\quad l^2(1+\sin^2\theta)d\theta^2=(a^2-4gl+4gl\cos\theta)dt^2.\ (7)$$

En éliminant t entre les équations (5) et (7), on a, pour l'équation différentielle de la trajectoire du point inférieur, rapportée aux coordonnées x' et θ,

$$2\,dx'=\frac{al\sqrt{1+\sin^2\theta}}{\sqrt{a^2-4gl+4gl\cos\theta}}\,d\theta-l\cos\theta d\theta.$$

Son intégration dépend de la même quadrature que celle de l'équation (7), mais on peut sans le secours de ces intégrales discuter plusieurs circonstances du mouvement, en suivant la marche des quantités θ, x' et x, et cherchant, à cet effet, leurs *maximums* et *minimums*. Pour cela, l'expression de $\dfrac{d\theta}{dt}$ égalée à zéro, donne :

$$a^2-4gl+4gl\cos\theta=0,\quad \text{d'où}\quad \cos\theta=-\frac{a^2-4gl}{4gl}.$$

Les valeurs de θ, tirées de cette équation sont donc impossibles pour $a^2-4gl>4gl$ ou $a^2>8gl$; il n'en est pas de même pour $a^2<8gl$; et en désignant la plus petite d'entre elles par Θ, il vient $\Theta=\pi,\ >\dfrac{\pi}{2},\ =\dfrac{\pi}{2},\ <\dfrac{\pi}{2}$, suivant qu'on a :

$$a^2=8gl,\quad >4gl,\quad =4gl,\quad <4gl.$$

Examinons si ces valeurs correspondent en effet à un *maximum*.

Pour cela, faisons dans l'équation (α) $\frac{d\theta}{dt}$ nul; elle donnera :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{2g\sin\theta}{l(1+\sin^2\theta)}.$$

Cette expression, nulle pour la première valeur de Θ, est essentiellement négative pour les suivantes, qui sont par conséquent des *maximums*. De plus, la valeur $-\Theta$, qui satisfait aussi à $\frac{d\theta}{dt} = 0$, la rendant positive, répond à un *minimum*. Cette dernière circonstance fait voir que pour $a^2 < 8gl$, θ croît d'abord de zéro à la valeur *maximum* Θ, puis diminue, devient nul et décroît jusqu'à la valeur *minimum* $-\Theta$, après quoi il recommence à croître, repasse par zéro et éprouve de nouveau les mêmes variations. Nous examinerons plus loin la valeur $\Theta = \pi$, qui donne $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$; considérons maintenant les quantités x' et x.

Les équations (5) et (6) donnent :

$$\frac{2\,dx'}{dt} = a - l\cos\theta\frac{d\theta}{dt}, \quad \text{et} \quad \frac{2\,dx}{dt} = a + l\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt},$$

ou en vertu de (7),

$$\frac{2\,dx'}{dt} = \frac{a\sqrt{1+\sin^2\theta} - \cos\theta\sqrt{a^2-4gl+4gl\cos\theta}}{\sqrt{1+\sin^2\theta}},$$

$$\frac{2\,dx}{dt} = \frac{a\sqrt{1+\sin^2\theta} + \cos\theta\sqrt{a^2-4gl+4gl\cos\theta}}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}.$$

Il résulte de ces deux expressions, en les égalant à zéro, l'équation :

$$a^2(1+\sin^2\theta) \quad \cos^2\theta\,(a^2-4gl+4gl\cos\theta),$$

ou

$$2gl\cos^2\theta\,(\cos\theta-1) + a^2(\cos^2\theta-1) = 0,$$

qui donne :

$$\cos\theta = 1, \quad \text{et} \quad 2gl\cos^2\theta + a^2\cos\theta + a^2 = 0;$$

d'où

$$\cos\theta = -\frac{a^2}{4gl} \pm \sqrt{\frac{a^4}{16g^2l^2} - \frac{a^2}{2gl}} = -1 - \left\{\frac{a^2}{4gl} - 1 \mp \sqrt{\left(\frac{a^2}{4gl}-1\right)^2 - 1}\right\}$$

Dans la dernière expression, le signe de la quantité entre les parenthèses dépend de celui de $\frac{a^2}{4gl} - 1$, donc $\frac{a^2}{4gl} > 1$, donne $\cos\theta$ négatif et plus grand que 1, tandis que $\frac{a^2}{4gl} = 1$ ou < 1 entraîne $\cos\theta$ imaginaire; ainsi dans tous les cas, la valeur correspondante de θ est impossible. Il reste donc à examiner la valeur $\cos\theta = 1$; d'où $\sin\theta = 0$, qui satisfait à $\frac{dx'}{dt} = 0$, mais non à $\frac{dx}{dt} = 0$; or on a :

$$2\frac{d^2x'}{dt^2} = -l\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} + l\sin\theta\frac{d\theta^2}{dt^2},$$

expression que la supposition $\sin\theta = 0$ anéantit, puisque l'équation (α) donne alors $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$. Formons les équations, d'où dépendent $\frac{d^3\theta}{dt^3}$ et $\frac{d^3x'}{dt^3}$: en négligeant les termes affectés de $\sin\theta$, et de $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, et posant $\cos\theta = 1$, elles se réduisent à :

$$l\frac{d^3\theta}{dt^3} + l\frac{d\theta^3}{dt^3} + 2g\frac{d\theta}{dt} = 0,$$

et

$$2\frac{d^3x'}{dt^3} = -l\frac{d^3\theta}{dt^3} + l\frac{d\theta^3}{dt^3} = 2\frac{d\theta}{dt}\left(l\frac{d\theta^2}{dt^2} + g\right),$$

en vertu de la première. Ce dernier résultat ne pouvant être annulé par la valeur $\cos\theta = 1$, celle-ci ne correspond point à un *maximum*; x' et x croissent donc indéfiniment.

Cette discussion nous a présenté trois cas distincts, correspondant aux trois circonstances $a^2 > 8gl$, $= 8gl$, $< 8gl$. Dans le premier θ croît sans cesse, et si dans les expressions :

$$2\frac{dx}{dt} = a + l\cos\theta\frac{d\theta}{dt},\quad 2\frac{dx'}{dt} = a - l\cos\theta\frac{d\theta}{dt},\quad \frac{dy'}{dt} = -l\sin\theta\frac{d\theta}{dt},\qquad (8)$$

qui donnent les vîtesses des points proposés, on fait $\theta = 2\pi$, d'où $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = 0$, et $\frac{d\theta}{dt} = \frac{a}{l}$, il vient :

$$\frac{dx}{dt} = a,\quad \frac{dx'}{dt} = 0,\quad \frac{dy'}{dt} = 0.$$

Le pendule se trouve donc alors absolument dans les mêmes circonstances qu'à l'origine ; ainsi son mouvement est périodique.

Lorsque $a^2 = 8gl$, θ croît jusqu'à la valeur $\Theta = \pi$, qui donne:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = \tfrac{1}{2}a, \quad \frac{dx'}{dt} = \tfrac{1}{2}a, \quad \frac{dy'}{dt} = 0,$$

le pendule, alors vertical, est dirigé en sens contraire de la pesanteur, et ses deux extrémités sont animées de vîtesses horisontales égales et dirigées dans le même sens : mais on verra plus loin qu'il n'arrive à cette position qu'après un tems infini.

Enfin, dans le troisième cas, θ croissant d'abord avec t, il faut prendre les formules (8) jusqu'à $\theta = \Theta$: passé cette valeur, θ restant positif et diminuant, $\frac{d\theta}{dt}$ devient négatif, ce qui donne le système :

$$2\frac{dx}{dt} = a - l\cos\theta\frac{d\theta}{dt}, \quad 2\frac{dx'}{dt} = a + l\cos\theta\frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dy'}{dt} = l\sin\theta\frac{d\theta}{dt}, \qquad (9)$$

qu'il faut employer de $\theta = \Theta$ à $\theta = 0$: cette dernière valeur donne:

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dx'}{dt} = a, \quad \frac{dy'}{dt} = 0:$$

ainsi le pendule ne diffère de ce qu'il était à l'origine, qu'en ce que l'impulsion est communiquée au point inférieur. Pour le suivre dans la région négative, il faut employer successivement les systêmes (8) et (9), en y changeant θ en $-\theta$ et $d\theta$ en $-dt$. Le dernier donnera, après ce changement, et pour $\theta = 0$, $\frac{dx}{dt} = a$, $\frac{dx'}{dt} = 0$, $\frac{dy'}{dt} = 0$; le pendule se trouvant alors exactement comme à l'origine, son mouvement sera encore périodique.

Pour compléter la solution du problême, il reste à intégrer l'équation (7), ce qui ne peut se faire que par approximation, puisqu'elle contient un radical du cinquième degré.

Cette équation résolue par rapport à dt donne :

$$dt = \frac{l\sqrt{1 + \sin^2\theta}\,.\,d\theta}{\sqrt{a^2 - 4gl + 4gl\cos\theta}}.$$

En y faisant $\cos\theta = z$ et $\frac{4gl}{a^2 - 4gl} = m$, il vient :

$$dt = -\frac{2l}{\sqrt{2a^2 - 8gl}} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{1+mz}\sqrt{1-z^2}} dz.$$

Supposons d'abord $a^2 > 8gl$, il en résulte $m < 1$, ce qui permet de développer suivant les puissances ascendantes de z la quantité $(1+mz)^{-\frac{1}{2}}$. On a par la formule du binome :

$$\left(1-\frac{1}{2}z^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - A_2z^2 - A_4z^4 - \ldots (1+mz)^{-\frac{1}{2}} = 1 - A'_1mz + A'_2m^2z^2 \ldots$$

Ces développemens multipliés entre eux, donnent pour celui de $\dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{1+mz}}$, la série :

$$\left\{\begin{array}{l} \quad 1 - A'_1mz + (A'_2m^2 - A_2)z^2 - (A'_3m^3 - A'_1A_2m)z^3 \\ + (A'_4m^4 - A'_2A_2Am^2)z^4 + \ldots, \end{array}\right.$$

dont la loi est évidente, et que nous représenterons par

$$1 - B_1z + B_2z^2 - B_3z^3 + B_4z^4 - \ldots;$$

désignant aussi le coefficient $\dfrac{2l}{\sqrt{2a^2 - 8gl}}$ par α, il vient :

$$t = -\alpha\left\{\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - B_1\int\frac{zdz}{\sqrt{1-z^2}} + B_2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{1-z^2}}\ldots\right\},$$

ou mettant pour les intégrales leurs valeurs connues :

$$\left\{\begin{array}{l} t = c' - \alpha \operatorname{arc}(\sin = z)\left\{1 + \frac{1}{2}B_2 + \frac{1.3}{2.4}B_4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}B_6\ldots\right\} \\ - \alpha\sqrt{1-z^2}\left\{\begin{array}{l} B_1 + \frac{1.2}{1.3}B_3 + \frac{1.2.4}{1.3.5}B_5 + \ldots \\ -z\left(\frac{1}{2}B_2 + \frac{1.3}{2.4}B_4\ldots\right) \\ +z^2\left(\frac{1}{3}B_3 + \frac{1.4}{3.5}B_5 + \ldots\right) \\ -\text{etc.} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

à l'origine $t = o$, $\theta = o$, $z = \cos\theta = 1$; ainsi:

$$c' = \alpha\frac{\pi}{2}\left\{1 + \frac{1}{2}B_2 + \frac{1.3}{2.4}B_4 \dots\right\};$$

désignant par K, Z_0, Z_1.... les séries qui entrent comme coefficiens dans l'expression de t, et mettant pour c' sa valeur, il vient:

$$t = K\alpha \text{ arc}(\cos = z) - \alpha\sqrt{1-z^2}\{Z_0 - Z_1 z + Z_2 z^2 \dots\}.$$

Les quantités Z_0, Z_1, Z_2.... dépendent les unes des autres; en effet, on a généralement:

$$Z_r = \frac{1}{r+1}B_{r+1} + \frac{1.r+2}{r+1.r+3}B_{r+3} + \dots,$$

et

$$Z_{r+2} = \frac{1}{r+3}B_{r+3} + \frac{1.r+4}{r+3.r+5}B_{r+5} + \dots;$$

ainsi:

$$Z_r = \frac{1}{r+1}B_{r+1} + \frac{r+2}{r+1}Z_{r+2};$$

d'où

$$Z_{r+2} = \frac{r+1}{r+2}\ Z_r - \frac{1}{r+2}B_{r+1}:$$

de plus $Z_1 = K - 1$: il suffit donc de former K et Z_0.

Remettant pour B_1, B_2... leurs valeurs, on a:

$$K = 1 - \frac{1}{2}A_2 - \frac{1.3}{2.4}A_4 \dots + \frac{1}{2}A'_2 m^2\left\{1 - \frac{3}{4}A_2 - \frac{3.5}{4.6}A_4 \dots\right\}$$
$$+ \frac{1.3}{2.4}A'_4 m^4\left\{1 - \frac{5}{6}A_2 \dots\right\} + \dots,$$

et $$Z_0 = A'_1 m\left\{1 - \frac{1.2}{1.3}A_2 - \frac{1.2.4}{1.3.5}A_4 \dots\right\}$$
$$+ \frac{1.2}{1.3}A'_3 m^3\left\{1 - \frac{4}{5}A_4 \dots\right\} + \frac{1.2.4}{1.3.5}A'_5 m^5\{1 - \dots\} + \dots$$

Il est facile de s'assurer que les coefficiens des diverses puissances de m forment une suite convergente; il en sera donc de même de ces séries, puisque $m < 1$.

Remettant pour α et z leurs valeurs, il vient:

$$t = \frac{2Kl}{\sqrt{2a^2 - 8gl}}\theta - \frac{2l}{\sqrt{2a^2 - 8gl}}\sin\theta\{Z_0 - Z_1\cos\theta + Z_2\cos^2\theta \dots\}.$$

Cette équation jointe à celles (4), (5), (6) et (8) complette la solution du problème dans le cas qui nous occupe. En y faisant $\theta = 0, = 2\pi, = 4\pi, \ldots$, on trouve :

$$t = 0, \quad = \frac{4K\pi l}{\sqrt{2a^2 - 8gl}} = T, \quad = \frac{8K\pi l}{\sqrt{2a^2 - 8gl}}, = \ldots$$

$$x = x' = 0, \quad = \frac{aT}{2} = X, \quad = \frac{2aT}{2}, = \ldots$$

et constamment $y' = l$, $\frac{dx'}{dt} = 0$, $\frac{dy'}{dt} = 0$ et $\frac{dx}{dt} = a$. Ainsi, comme l'a fait voir la discussion générale, le mouvement est périodique; de plus, le tems d'une période est $\frac{4K\pi l}{\sqrt{2a^2 - 8gl}}$. Enfin, il est facile de s'assurer qu'en désignant par $t_1, y'_1, x'_1 \ldots$; $t_2, y'_2, x'_2 \ldots$ les valeurs de $t, y', x' \ldots$, correspondantes à $\theta = \theta_1$ et $\theta = 2\pi - \theta_1$, on a :

$$t_2 = T - t_1, \quad y'_2 = y'_1, \quad x'_2 = X - x'_1, \quad x_2 = X - x_1,$$

$$\frac{d\theta_2}{dt_2} = \frac{d\theta_1}{dt_1}, \quad \frac{dx'_2}{dt_2} = \frac{dx'_1}{dt_1} \quad \text{et} \quad \frac{dx_2}{dt_2} = \frac{dx_1}{dt_1};$$

d'où résulte que la trajectoire décrite durant une période, par l'extrémité du pendule, est symétrique par rapport à la verticale, dont l'abscisse est $\frac{X}{2}$ direction du pendule au milieu de la période, et que les circonstances du mouvement se retrouvent les mêmes pour deux positions symétriques par rapport à cette verticale.

La supposition de $a^2 = 8gl$ donne $m = 1$, et fait changer de forme l'expression de dt; en effet, on a alors :

$$dt = -a \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2} z^2}\, dz}{\sqrt{1+z}\sqrt{1-z^2}} = -a \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2} z^2}\, dz}{(1+z)\sqrt{1-z}}:$$

mettant pour $\sqrt{1 - \frac{1}{2} z^2}$ son développement déja employé, il vient :

$$dt = -a \left\{1 - A_2 z^2 - A_4 z^4 - \ldots\right\} \frac{dz}{(1+z)\sqrt{1-z}}.$$

Conformément à une méthode connue, due à Lagrange, nous intégrerons la fonction :

$$\frac{dz}{(1+z)\sqrt{1-z}}\cdot\frac{1}{1-az}=\frac{dz}{(1-az)(1+z)\sqrt{1-z}},$$

nous développerons son intégrale par rapport à a, et nous remplacerons les puissances de cette lettre par les coefficiens des puissances correspondantes de z. Posant $\sqrt{1-z}=u$, la fraction proposée devient :

$$\frac{-2du}{(1-a+au^2)(2-u^2)}=-\frac{1}{1-a}\cdot\frac{du}{(1+\alpha'u^2)(1-\alpha''u^2)},$$

en faisant $\frac{a}{1-a}=\alpha'$ et $\alpha''=\frac{1}{2}$; mais

$$\frac{du}{(1+\alpha'u^2)(1-\alpha''u^2)}=\frac{1}{\alpha'+\alpha''}\left\{\frac{\alpha'}{1+\alpha'u^2}+\frac{\alpha''}{1-\alpha''u^2}\right\},$$

et

$$\int\frac{\alpha'du}{1+\alpha'u^2}=\sqrt{\alpha'}\,\text{arc}\,(\text{tang}=u\sqrt{\alpha'}),\quad \int\frac{\alpha''du}{1-\alpha''u^2}=-\int\frac{-\alpha''du}{1-\alpha''u^2}$$

$$=-\sqrt{-\alpha''}\,\text{arc}\,(\text{tang}=u\sqrt{-\alpha''})=-\frac{1}{2}\sqrt{\alpha''}\,\text{l}\left\{\frac{1-u\sqrt{\alpha''}}{1+u\sqrt{\alpha''}}\right\},$$

puisqu'en général :

$$2x\sqrt{-1}=\text{l}\left\{\frac{1+\text{tang}\,x\sqrt{-1}}{1-\text{tang}\,x\sqrt{-1}}\right\}.$$

Remettant pour α' et α'' leurs valeurs, il vient pour l'intégrale de la fraction proposée :

$$-\frac{2}{1+a}\left\{\sqrt{\frac{a}{1-a}}\,\text{arc}\left(\text{tang}=u\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{l}\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2}+u}\right)\right\}+$$

la constante est nulle; car on doit avoir à l'origine $t=0$ et $z=1$, ou $u=0$. Il resterait à développer ce résultat suivant les puissances de a; mais vu l'indépendance de u et de a, on peut déduire de cette expression même des valeurs particulières de l'intégrale. Faisant $z=-1$, ce qui correspond à $\theta=\pi$, et donne $u=\sqrt{2}$, le terme affecté de logarithmes devient infini; ainsi la valeur correspondante de t est infinie comme nous l'avions annoncé. Nous

ne nous arrêterons pas davantage sur ce cas qui ne présente d'ailleurs que cette seule particularité.

Venons enfin à celui de $a^2 < 8gl$, qui donne $m > 1$, ce qui rend divergentes les séries employées dans la première solution. Faisons dans l'expression primitive de dt, $\frac{a^2 - 4gl}{4gl} = \frac{1}{m} = m'$, elle devient :

$$dt = \frac{l\sqrt{1+\sin^2\theta}\,d\theta}{2\sqrt{gl}\sqrt{m'+\cos\theta}} = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}z^2}\,dz}{\sqrt{m'+z}\sqrt{1-z^2}}:$$

changeant dans le développement de $(1+mz)^{-\frac{1}{2}}$, mz en $-z^2$, on en tire :

$$(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + A'_1z^2 + A'_2z^4 + A'_3z^6 + \ldots$$

Multipliant ce développement par celui de $\left(1-\frac{1}{2}z^2\right)^{\frac{1}{2}}$ déja employé, on a :

$$\begin{aligned} &1 + z^2(A'_1 - A_2) + z^4(A'_2 - A'_1A_2 - A_4) \\ &+ z^6(A'_3 - A'_2A_2 - A'_1A_4 - A_6) + \ldots, \end{aligned}$$

série que nous représenterons par $1 + B'_2z^2 + B'_4z^4 + \ldots$, ce qui donne :

$$t = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\left\{\int\frac{dz}{\sqrt{m'+z}} + B'_2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{m'+z}} + \ldots\right\}.$$

Posant $m' + z = u^2$ pour rendre ces intégrales rationnelles, et intégrant par les méthodes connues, il vient :

$$\begin{aligned} t = c' - \sqrt{\frac{2l}{g}}\,u&\left\{1 + B'_2\left(\frac{u^4}{5} - \frac{2u^2}{3}m' + m'^2\right)\right. \\ &\left. + B'_4\left(\frac{u^8}{9} - \frac{4}{7}u^6m' + \frac{6}{5}u^4m'^2 - \frac{4}{3}u^2m'^3 + m'^4\right) + \ldots\right\}. \end{aligned}$$

Remettons pour u sa valeur, la série que renferme t, deviendra :

$$\left.\begin{aligned} &1 + B'_2\left\{\frac{(m'+z)^2}{5} - \frac{2}{3}(m'+z)m' + m'^2\right\} \\ &+ B'_4\left\{\frac{(m'+z)^4}{9} - \frac{4}{7}(m'+z)^3m' + \ldots\right\} + \ldots, \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

expression qui a pour terme général :

$$\left.\begin{aligned}&B'_n\left\{\frac{1}{2n+1}(m'+z)^n-\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{2n-1}(m'+z)^{n-1}m'\ldots\right.\\&\left.\pm N.\frac{1}{2n-2k+1}(m'+z)^{n-k}m'^k\ldots\right\},\end{aligned}\right\}(b)$$

N représentant le coefficient connu du binome. Développons (b) suivant les puissances de z par le théorême de Mac-Laurin. Pour cela, faisons $z=0$ dans cette fonction et ses coefficiens différentiels, ce qui donnera, en faisant abstraction du facteur commun B'_n, les expressions :

$$m'^n\left\{\frac{1}{2n+1}-\frac{n}{1}\,\frac{1}{2n-1}\ldots\pm\frac{N}{2n-2k+1}\right\},$$

$$m'^{n-1}\left\{\frac{n}{2n+1}-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2n-1}\ldots\pm\frac{N.n-k}{2n-2k+1}\right\},$$

$$m'^{n-2}\left\{\frac{n.n-1}{2n+1}-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1.n-2}{2n-1}\ldots\right\}\ldots,$$

que nous représenterons respectivement par m'^nS_n, $m'^{n-1}S'_n$, $m'^{n-2}S''_n\ldots$, ce qui donne pour le développement de (b),

$$B'_n\left\{m'^nS_n+m'^{n-1}S'_n\frac{z}{1}+m'^{n-2}S''_n\frac{z^2}{1.2}\ldots\right\}.$$

On en déduit celui de (a), en faisant successivement $n=2, =4, =6\ldots$, et on a la série :

$$1+B'_2m'^2S_2+B'_4m'^4S_4\ldots$$
$$+\frac{z}{1}\{B'_2m'S'_2+B'_4m'^3S'_4\ldots\}+\frac{z^2}{1.2}\{B'_2S''_2+B'_4m'^2S''_4\ldots\}.$$

Examinons la loi des quantités S_n, $S_{n+2}\ldots S'_n$, $S'_{n+2}\ldots S''_n$, $S''_{n+2}\ldots$, et pour cela, considérons-les comme provenant de la fonction

$$\frac{x^n}{2n+1}-\frac{n}{1}\,\frac{x^{n-1}}{2n-1}\ldots\pm\frac{Nx^{n-k}}{2n-2k+1},$$

et de ses coefficiens différentiels, en y faisant $x=1$. Il est facile de s'assurer qu'on a, en désignant par s_n la valeur générale de cette fonction :

$$2s_nx^{\frac{1}{2}}=\int x^{-\frac{1}{2}}(x-1)^ndx$$

$$=\frac{2x^{\frac{1}{2}}(x-1)^n-2n\int x^{-\frac{1}{2}}(x-1)^{n-1}dx}{2n+1}=\frac{2x^{\frac{1}{2}}(x-1)^n}{2n+1}-\frac{4n}{2n+1}x^{\frac{1}{2}}s_{n-1},$$

en observant qu'on a également $2\,s_{n-1}x^{\frac{1}{2}}=\int x^{-\frac{1}{2}}(x-1)^{n-1}\,dx$. On a donc, en général :

$$s_n=\frac{(x-1)^n}{2n+1}-\frac{2n}{2n+1}s_{n-1},\quad s'_n=\frac{n(x-1)^{n-1}}{2n+1}-\frac{2n}{2n+1}s'_{n-1};$$

et $$s^k_n=\frac{n.n-1\ldots n-k+1}{2n+1}(x-1)^{n-k}-\frac{2n}{2n+1}s^k_{n-1}.$$

Il en résulte entre les valeurs correspondantes à $x=1$, les relations :

$$S_n=-\frac{2n}{2n+1}S_{n-1}\ldots\; S^k_n=-\frac{2n}{2n+1}S^k_{n-1}.$$

Cette dernière n'a lieu que jusqu'à $k=n-1$, car pour $k=n$, la supposition de $x=1$ ne ferait plus disparaître de l'expression de s^k_n, le terme en $x-1$, dont l'exposant serait nul. Changeant n en $n-1$, il vient :

$$S_{n-1}=-\frac{2(n-1)}{2n-1}S_{n-2},\quad \text{d'où } S_n=\frac{4n.n-1}{(2n+1)(2n-1)}S_{n-2},$$

de même $$S^k_n=\frac{4n.n-1}{(2n+1)(2n-1)}S^k_{n-2},$$

et cette dernière n'a lieu, d'après la remarque précédente, que jusqu'à $k=n-2$. Le coefficient $\frac{4n.n-1}{(2n+1)(2n-1)}$ étant une fraction, il en résulte que les quantités $S_2, S_4\ldots S'_2, S'_4\ldots$ forment des suites décroissantes. Il serait, en outre, facile de conclure des expressions ci-dessus, que S^k_n est positif ou négatif suivant que k est pair ou impair.

On vient de voir que les séries qui entrent dans le développement de (*a*) sont convergentes; il en est de même de ce développement. En effet, trois termes consécutifs ont pour expression, en supposant k pair :

$$\frac{z^k}{1.2\ldots k}\left\{B'_kS^k_k+B'_{k+2}m'^2S^k_{k+2}\ldots\right\},$$

$$\frac{m'z^{k+1}}{1.2\ldots k+1}\left\{B'_{k+2}S^{k+2}_{k+2}+\ldots\right\},\quad \frac{z^{k+2}}{1.2\ldots k+2}\left\{B'_{k+2}S^{k+2}_{k+2}+\ldots\right\};$$

et on peut s'assurer que les coefficients de z, forment une suite plus convergente que les quantités :.

$$\frac{1}{1.2\ldots k} S_k^k, \qquad \frac{1}{1.2\ldots k+1} S_{k+2}^{k+1}, \qquad \frac{1}{1.2\ldots k+2} S_{k+2}^{k+2},$$

qui d'après les formules ci-dessus, se changent en

$$\frac{1}{2k+1}, \quad -\frac{2(k+2)}{(2k+3)(2k+5)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2k+5},$$

expressions qui vont en décroissant. Il résulte donc de cette discussion que les séries employées sont convergentes, et qu'on peut représenter le développement de (a) par $Z'_0 - Z'_1 z + Z'_2 z^2 - \ldots$

Il vient ainsi :

$$t = c' - \sqrt{\frac{2l}{g}} \sqrt{\frac{a^2 - 4gl}{4gl}} + z \{ Z'_0 - Z'_1 z + Z'_2 z^2 \ldots \},$$

à l'origine $t = 0$, $z = 1$, par conséquent :

$$c' = \frac{a}{g\sqrt{2}} \{ Z'_0 - Z'_1 + Z'_2 \ldots \},$$

quantité nécessairement finie, puisque la série qui l'exprime est convergente et a ses signes alternatifs. Laissant c', pour abréger, et remettant au lieu de z sa valeur $\cos\theta$, il vient, pour remplacer l'équation (7), dans le cas qui nous occupe :

$$t = c' - \frac{1}{g\sqrt{2}} \sqrt{a^2 - 4gl + 4gl\cos\theta} \{ Z'_0 - Z'_1 \cos\theta + Z'_2 \cos^2\theta \ldots \}.$$

Cette équation supposant $\frac{d\theta}{dt}$ positif, ne devra être employée, d'après ce qu'a fait connaître la discussion générale, que jusqu'à la valeur $\theta = \Theta$, donnée par l'équation $a^2 - 4gl + 4gl\cos\theta = 0$, et pour laquelle $t = c'$. Après avoir acquis cette valeur, θ diminue : il faut donc changer la signe du radical, et employer la formule :

$$t = c' + \frac{1}{g\sqrt{2}} \sqrt{a^2 - 4gl + 4gl\cos\theta} \{ Z'_0 - Z'_1 \cos\theta + Z'_2 \cos^2\theta \ldots \},$$

jusqu'à $\theta = 0$, qui donne $t = 2c'$, pour l'intervalle de tems écoulé entre deux passages consécutifs par la verticale. Enfin θ devenant négatif, on devra changer dans les deux formules θ en $-\theta$, et par suite $d\theta$ en $-d\theta$, ce qui conduit aux mêmes équations, mais en ordre inverse, et donne encore l'intervalle de tems $2c'$ jusqu'au retour à la verticale, après lequel le mouvement recommence comme à l'origine. Le tems d'une période est $T = 4c'$, et le point de

suspension décrit pendant chacune d'elles un espace $X = 2ac'$. De plus, les branches de courbe décrites de $\theta = o$ à $\theta = \Theta$ et de $\theta = \Theta$ à $\theta = o$, sont respectivement semblables à celles qui le sont de $\theta = -\Theta$ à $\theta = o$, et de $\theta = o$ à $\theta = -\Theta$; mais elles se trouvent placées symétriquement à l'égard de la verticale, dont l'abscisse est $\frac{X}{2}$, direction du pendule au milieu de la période; ainsi la trajectoire elle-même est symétrique par rapport à cette verticale. Enfin, pour des positions du pendule, correspondantes à des points semblablement placés sur les branches de trajectoire semblables, les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$ et $\frac{dy'}{dt}$ se retrouvent les mêmes, et celles de $\frac{d\theta}{dt}$ sont égales, mais de signes contraires.

Des tangentes aux projections des courbes à double courbure. Examen des cas particuliers où la méthode graphique, d'après laquelle on mène ces tangentes, est en défaut; par M. Hachette.

La tangente en un point d'une courbe qui résulte de la pénétration de deux surfaces, est évidemment la droite d'intersection de deux plans, dont chacun passe par le point de la courbe, et touche l'une des deux surfaces; les projections de cette droite sont les tangentes des projections de la courbe d'intersection des deux surfaces. La détermination de ces tangentes dépend donc de l'intersection de deux plans. Toutes les fois que cette intersection sera perpendiculaire au plan de projection, sa projection se confondra avec le point de la courbe pour lequel on demande la tangente, et la direction de cette tangente ne sera pas déterminée : en voici deux exemples tirés des épures de coupe des pierres, relatives à deux voûtes, l'une qu'on nomme *Porte droite, rachetant un berceau cylindrique*, l'autre *Porte biaise, en tour ronde, rachetant un berceau sphérique.* Dans la première, deux cylindres droits, horisontaux, dont les axes (fig. 2, pl. 1) AB, AC se coupent à angle droit au point A, et qui ont pour bases les cercles des rayons CD, BE, se pénètrent, et la projection de la courbe d'intersection sur le plan horisontal des axes, est composée de deux branches égales LMN, $L'M'N'$. Les quatre points L, N, L', N' de cette courbe, situés dans le plan des axes, sont ceux pour lesquels la droite d'intersection des plans

tangens aux deux cylindres, est perpendiculaire au plan, qui contient ces points. Dans l'épure relative à la porte biaise, rachetant un berceau sphérique, un cylindre droit horisontal pénètre une sphère, dont le centre O (fig. 3) est sur le plan horisontal mené par l'axe AC du cylindre; la projection de la courbe d'intersection sur ce plan, est composée de deux branches égales LMN, $L'M'N'$; la méthode ordinaire des tangentes est encore en défaut pour les quatre points L, N, L', N' de cette courbe, situés dans le plan horisontal de projection.

L'étude de la coupe des pierres ayant pour objet d'exercer les élèves de l'Ecole Polytechnique au dessin du trait et aux applications des théories mathématiques, je fais voir comment on prolonge indéfiniment les lignes LMN, $L'M'N'$ (fig. 2 et 3), dont le tracé graphique ne donne que des portions détachées, et par quel moyen on construit les droites qui touchent ces lignes, aux points de la courbe d'intersection des deux surfaces, tels que L, N, L', N'.

Prenant (fig. 2) les axes AB, AC des surfaces cylindriques pour axes des coordonnées, les équations de ces surfaces se réduisent à celles de leurs bases qu'on peut supposer dans les plans des xz et des yz. Les bases étant des cercles, les équations de ces cercles seront, en nommant r et R leurs rayons :

$$x^2 + z^2 = r^2, \quad y^2 + z^2 = R^2.$$

Eliminant z^2 entre ces équations, on a pour la projection de la ligne d'intersection des deux cylindres, $y^2 - x^2 = R^2 - r^2$; équation d'une hyperbole équilatère, dont le paramètre constant est $R^2 - r^2$. Ainsi deux autres cylindres concentriques aux premiers, et des rayons R', r' se couperont suivant une courbe, dont la projection horisontale ne changera pas, pourvu qu'on ait :

$$R'^2 - r'^2 = R^2 - r^2.$$

Ayant pris pour r' une droite quelconque CF, l'arête du premier cylindre, passant par le point F, devra couper le second cylindre du rayon R', en un point dont la projection horisontale est M. Menant donc par ce point M l'horisontale MC', et par le point C' la verticale $C'F'$ égale à CF, la droite BF' sera le rayon R' du second cylindre qui coupera le premier du rayon $CF = r'$, suivant une courbe dont la projection horisontale sera comme pour les cylindres des rayons R et r, composée des branches LMN, $L'M'N'$, prolongées jusqu'aux points l, n, l', n'.

Considérant les points L, N, L', N' comme les projections de points appartenant aux cylindres des rayons R', r'; on déterminera les tangentes pour ces points par la méthode ordinaire, c'est-à-dire, par l'intersection des plans tangens à ces deux cylindres.

Passons maintenant à l'examen de la courbe *LMN*, *L'M'N'* (fig. 5), projection de l'intersection du cylindre et de la sphère. Prenant pour origine des coordonnés le centre *O* de la sphère, et pour axe des *y* une parallèle à l'axe *AC* du cylindre; on a pour les équations de ces deux surfaces :

$$x^2+y^2+z^2=R^2; \qquad (x-a)^2+z^2=r^2.$$

R est le rayon de la sphère; *r* le rayon du cylindre, et *a* la distance *OA* de l'axe *AC* au centre *O* de la sphère.

Eliminant z^2 entre ces deux équations, on a pour la projection de la courbe d'intersection sur le plan des *xy*,

$$y^2=R^2-r^2+a^2-2ax;$$

équation d'une parabole, dont le sommet *S* est sur l'axe des *x*, à une distance *OS* du centre *O* de la sphère, égale à $\frac{R^2-r^2+a^2}{2a}$. Cette parabole ne cessera pas d'appartenir à la projection de la courbe d'intersection de sphères concentriques au point *O*, et de cylindres ayant pour axe la droite *AC*, pourvu que la quantité R^2-r^2 soit constante. On satisfera à cette condition, en mettant le point dont *M* est la projection sur le plan horisontal des *xy*, à la même distance de ce plan, tant sur le nouveau cylindre que sur la nouvelle sphère correspondante.

Soit *CF* le rayon arbitraire *r'* du nouveau cylindre; ayant élevé la perpendiculaire *MF'* à la droite *OM*, et prenant *MF'* = *CF*, *OF'* sera le rayon *R'* de la sphère qui coupera le cylindre suivant une ligne, dont la projection donnée *LMN*, *L'M'N'*, se prolongera jusqu'aux points *l*, *n*, *l'*, *n'*. Considérant la sphère du rayon *R'* et le cylindre du rayon *r'*, on détermine par la méthode ordinaire, les tangentes aux points *L*, *N*, *L'*, *N'*. On peut encore déterminer ces tangentes par une considération nouvelle, celle des plans normaux aux courbes à double courbure, comme on va le voir par l'article suivant de M. Binet.

Remarque sur la construction graphique des tangentes aux projections des courbes; par M. J. Binet.

Lorsqu'une courbe résulte de l'intersection de deux surfaces, on fait ordinairement dépendre la détermination de la tangente en un de ses points, de celle des plans tangens à ces surfaces; car l'intersection de ces plans est en effet la tangente demandée (Géo-

métrie descriptive de M. Monge, n°. 58). Il est visible que cette tangente est perpendiculaire à-la-fois aux deux normales aux surfaces proposées, et par conséquent elle est perpendiculaire à leur plan: ainsi le plan des deux normales aux surfaces est le plan normal à la courbe de leur intersection. Toutes les fois que ce plan sera d'une facile construction, le problême de déterminer la tangente à la courbe proposée, se ramènera par cette considération à conduire une perpendiculaire à ce plan : c'est ce qui a lieu dans le tracé de plusieurs épures.

Si l'on veut déterminer la tangente en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces de révolution, dont les axes soient, ou ne soient pas dans le même plan; ayant pris un des plans de projection parallèle aux deux axes, et l'autre plan de projection perpendiculaire à l'un d'eux, la détermination des deux normales et de leur plan sera très-simple, et elle conduira immédiatement à celle de la tangente aux deux surfaces.

A ce cas général se rapporte la détermination de la courbe d'intersection des deux surfaces cylindriques, *de la porte droite rachetant un berceau.* Du point assigné sur la courbe, il suffit d'abaisser des perpendiculaires sur les axes des cylindres droits en question, et de joindre par une droite les points où ces perpendiculaires rencontrent les axes; cette droite est la trace du plan normal sur le plan horisontal des deux axes, et la perpendiculaire à cette trace, abaissée du point donné de la projection de la courbe, est la tangente. Cette construction s'applique même aux points de la courbe (tels que *N*, fig. 2), qui résultent de l'intersection des génératrices comprises dans le plan horisontal des deux axes, points pour lesquels la construction ordinaire, fondée sur l'intersection des traces des plans tangens, se refuse à faire connaître la direction de la courbe en projection horisontale.

Dans la *porte biaise, en tour ronde, rachetant un berceau sphérique*, la douelle de la porte est terminée d'une part au cône droit extérieur, et d'une autre part à la sphère intérieure. (Dans tout ceci, je m'occupe des épures qui font partie du cours de l'Ecole, et je suppose qu'on ait ces épures sous les yeux, ou seulement les fig. 2, 3, pl. 1.) On pourra mener à ces surfaces leurs normales, au moyen desquelles on aura avec la plus grande facilité les tangentes aux deux courbes qui comprennent la douelle de la porte.

La considération du plan normal présente encore quelqu'avantage dans la tracé de la tangente à *la roulette sphérique*, qui est la courbe que décrit un point invariablement lié à un cône arbitraire, qui roule sans glisser sur un cône fixe aussi quelconque, ces deux cônes ayant constamment le même sommet. On prouve

aisément que la courbe a pour plan normal le plan conduit par la génératrice de contact des deux cônes, et par le point pris sur la courbe. La *roulette sphérique* devient *l'épicycloïde sphérique*, lorsque les deux cônes arbitraires se changent en cônes droits. Alors prenant, comme l'a fait M. Hachette (Correspondance, tom. II, ou Supplément à la géométrie descriptive, pag. 88), pour exécuter les projections, le plan de la base du cône fixe, et le plan conduit par son axe et par la génératrice de contact des cônes, cette dernière droite sera précisément l'une des traces du plan normal. Menant donc à cette trace, et par le point proposé une parallèle, en cherchant le point où elle perce le plan de la base du cône invariable, ce point-là devra encore appartenir à la seconde trace du plan normal. Deux perpendiculaires à ces traces menées par les projections du point décrit sur la courbe, seront les projections de la tangente.

Solution graphique de l'équation du troisième degré, $x^3 - px - q = 0$; *par M.* Monge.

L'équation proposée résulte de l'élimination de y entre les deux équations :

$$y = x^3, \qquad y = px + q ;$$

l'une est la parabole cubique, dont les ordonnées y sont les cubes des abscisses x ; l'autre représente une droite, dont la position est déterminée par les constantes p et q. Ayant construit ces deux lignes, les abscisses x des points où elles se coupent, sont évidemment les racines de l'équation proposée.

Soient (fig. 4, pl. 1) AX, AY les axes des x et des y ; AMB la portion de parabole cubique qui correspond à une abscisse donnée, par exemple, 4 centimètres. L'ordonnée A (64, du point B est de 64 centimètres ; la branche de parabole cubique qui correspond à la même abscisse prise négativement est $A'B'$. Ces deux branches ont un point d'inflexion en A, et ce point en est le centre. Une ligne droite telle que MN coupe la branche AB en un point M, et ne rencontre pas la branche $A'B'$. Dans ce cas, l'équation proposée n'a qu'une racine, et cette racine est égale à l'abscisse du point M. Si la droite de l'équation $y = px + q$, coupe les deux branches AB, $A'B'$ en trois points L', M', N', les abscisses de ces points sont les trois racines réelles de l'équation proposée.

Lorsque la droite proposée ne rencontrera aucune des deux portions AB, AB' de la parabole cubique, on prolongera la parabole

cubique au delà des points B et B', en cherchant les abscisses positives des points compris entre les ordonnées 1×64 et 2×64, 2×64 et 3×64, 3×64 et 4×64, et ainsi de suite, jusqu'à la portion comprise entre les ordonnées 15×64 et 16×64; de cette manière, les portions de la parabole cubique correspondent a des parties égales de l'axe des y, et si l'on suppose que ces parties soient ramenées sur la première A (64), la dernière portion UV aura pour ordonnées des points extrêmes U et V, 63×66 et 64×64, les abscisses de ces points étant $4\sqrt[3]{63}$ et 16. Par cette construction, on obtiendra dans un rectangle de 16 centimètres sur 64, la branche de parabole cubique, dont la dernière ordonnée positive est de 40,96 mètres.

Les ordonnées étant :

$$1 \times 64^{\text{cent.}}, \quad 2 \times 64^{\text{c.}}, \quad 3 \times 64^{\text{c.}} \ldots\ldots, \quad 64 \times 64^{\text{c.}},$$

les abscisses correspondantes, seront :

$$4, \quad 4 \times \sqrt[3]{2}, \quad 4 \times \sqrt[3]{3} \ldots\ldots, \quad 16.$$

Il est évident que les dernières branches de la courbe différeront très-peu de la ligne droite : la dernière, par exemple, comprise entre les ordonnées 63×64 et 64×64, a pour abscisses correspondantes de ces ordonnées, 16 et $4\sqrt[3]{15}$, dont la différence est à très-peu près d'un millimètre.

La droite représentée par l'équation $y - px = q$, coupe l'axe des x, et ses parallèles menées par les points de division 0×64, $2 \times 64, \ldots\ 64 \times 64$ de l'axe des y ; les portions de la droite comprises entre ces parallèles sont toutes égales entre elles et de même direction ; il sera donc facile, après avoir ramené chacune de ces portions entre l'axe des abscisses, et la parallèle à cet axe menée par le point (64) de l'axe de y, de reconnaître les points d'intersection de la droite proposée et de la parabole cubique.

La fig. 4, pl. 1, tracée dans le cadre $KLMN$, représente sur une échelle d'un millimètre pour centimètre le dessin de la parabole, dont les ordonnées sont égales aux cubes des abscisses prises positivement et négativement, depuis 0 jusqu'à 16 centimètres. La planche de ce dessin (*) a été gravée avec le plus grand soin, par les artistes de la commission d'Egypte ; les parallèles ont été

(*) Ce dessin gravé, se vend à part, chez Mme. Ve. Courcier, quai des Grands-Augustins, no. 57.

tracées avec la machine *conté*, et la courbe a été dessinée par M. Girard. La distance des abscisses positive et négative, qui correspondent aux points extrêmes de cette courbe, mesurée sur l'axe des y, est réellement de 81,92 mètres; cette distance est ramenée sur la planche gravée, à une dimension 64 fois plus petite, 1,28 mètre.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Solutions de ces deux questions,

1°. Construire par la règle et le compas l'intersection d'une droite, et d'une surface gauche du second degré; 2°. construire un cercle tangent à trois cercles donnés dans un plan; par M. DANDELIN, *élève.*

SOLUTION DU PREMIER PROBLÈME.

Soit (fig. 1, pl. 2), acb une hyperbole, et AB, AC ses asymptotes; menons la corde bc, terminée en B et en C aux asymptotes. Soit de plus An le diamètre conjugué à la corde bc; ce diamètre coupera en deux également la corde bc, et par conséquent BC. Si donc par le point b nous menons bc' parallèle à AB, et bb' parallèle à AC, que nous fassions la même chose pour le point c, nous construirons de cette manière un parallélogramme, dont la diagonale $b'c'$ se confondra avec le diamètre An. Cela est évident.

Imaginons maintenant que a, b, c soient trois points d'une hyperbole, et que nous connaissions les directions $A'B'$ et $A'C'$ des asymptotes de cette hyperbole; nous pourrons aisément trouver la vraie position des asymptotes; en effet, sur les points a, b construisons un parallélogramme $aa''bb''$, dont les côtés soient parallèles aux directions données des asymptotes; d'après ce que nous venons de dire, la diagonale $a''b''$ sera un diamètre. Sur b, c construisons un autre parallélogramme $bb'cc'$, dont les côtés soient aussi parallèles aux directions données, et la diagonale $b'c'$ sera encore un diamètre. L'intersection A de ces deux diagonales est le centre de l'hyperbole, et si l'on même AB parallèle à $A'B'$ et AC à $A'C'$, on aura ses asymptotes.

Si maintenant on donnait une droite EF, et qu'on voulût construire les points d'intersection de cette droite et de l'hyperbole, cela serait fort aisé. Menons par le point a la corde kai parallèle à EF, et supposons que z soit un des points cherchés. Nous aurons par une propriété connue de l'hyperbole $ka.ai = Ez.Fz$, et il n'y

a plus pour trouver le point z qu'à diviser EF en deux parties, dont le produit soit donné. J'ai tracé la construction sur la figure.

Nous avons donc le moyen de construire à l'aide de la règle et du compas, l'intersection d'une droite et d'une hyperbole, lorsque nous ne connaissons de celle-ci que trois points, et la direction des asymptotes. Or c'est à ce dernier problème que se réduira toujours la solution de celui concernant les surfaces gauches du second degré, qui sont, comme l'on sait, engendrées par une droite mobile, qui s'appuie sur trois autres droites fixes, qu'on nomme *directrices*. En effet, concevons par une des trois directrices données un plan parallèle à la droite donnée; ce plan coupera la surface suivant deux droites que nous appelerons A et A', et dont l'une sera la directrice elle-même. Apresent par la droite donnée, menons un plan parallèle aux droites A et A', il coupera la surface suivant une hyperbole, dont les asymptotes sont parallèles à A et A'. (Voyez le Supplément de la Géométrie descriptive; par M. Hachette, pag. 75, art. 84). Il sera facile de trouver trois points de cette hyperbole, c'est-à-dire, trois points d'intersection de son plan et de la surface gauche, et alors le problème sera résolu, puisqu'il n'y aura plus qu'à construire l'intersection de cette hyperbole et de la droite donnée, et qu'on aura tous les élémens nécessaires, savoir: trois points de la courbe et la direction de ses asymptotes.

Solution du second problême.

Etant donnés trois cercles c, c', c'' *(fig. 2, pl. 2), trouver une quatrième circonférence qui leur soit tangente.*

Imaginons que l'on ait pris ces cercles pour les grands cercles de trois sphères que nous appelerons aussi c, c', c'', et le problème se réduira à mener une sphère tangente à trois autres, et dont le centre soit dans le plan du triangle $cc'c''$, fig. 2.

Supposons cette sphère trouvée; elle touchera en a, a', a'' les trois sphères données, et ces trois points seront précisément les points de contact du cercle demandé et des autres cercles.

Menons un plan tangent aux trois sphères, et soit $AA'A''$ l'intersection de ce plan et du plan $cc'c''$. On sait (Supplément à la Géométrie descriptive, n°. 28), que parmi les quatre séries de sphères tangentes à c, c', c'', il y en a une correspondante à la ligne AA''. Supposons encore que ce soit dans cette série que nous ayons pris la sphère tangente, et voyons quelles conditions remplissent ses divers élémens.

Soient b, b', b'' les points de contact du plan tangent mené par la droite $AA'A''$ et des trois sphères; d'abord (Supplément de la Géométrie descriptive, et par abréviation, S. G., n°. 59), les six

points b, b', b'', a, a', a'', seront sur une même sphère. Cette sphère sera coupée, 1°. par le plan tangent suivant un de ses petits cercles, lequel passera par b, b' et b''; 2°. par le plan $cc'c''$ suivant un autre cercle, lequel sera précisément le grand cercle $aa'a''$ de la sphère tangente cherchée. Par les cercles $aa'a''$, $bb'b''$, on peut donc (S. G., n°. 64) faire passer une surface conique. Voyons comment on peut déterminer le sommet de cette surface.

Prenons sur la droite $AA'A''$, les sommets A et A' des cônes tangens, le premier aux sphères c' et c'', le second aux sphères c et c''. Les quatre points a', b', a'', b'' se trouvent sur un même plan passant par A'; les quatre points a'', b'', a, b se trouvent aussi sur un même plan passant par A. (S. G., n°. 30). Les quatre points a, b, a', b' se trouvent sur un troisième plan passant par le point A'', sommet du cône tangent à c et c'. Ces trois plans se coupent en un point S, qui est le sommet du cône cherché; ce point S se trouve sur la rencontre des trois intersections de ces plans, pris deux à deux, c'est-à-dire sur la rencontre des lignes ab, $a'b'$, $a''b''$. Si donc, nous faisons passer par le cercle connu $bb'b''$, un cône dont le sommet soit en S, ce cône coupera la sphère qui passe par les cercles $aa'a''$ et $bb'b''$, suivant un cercle $aa'a''$, sur lequel se trouveront les points cherchés $aa'a''$.

Maintenant imaginons une tangente aT commune aux deux cercles c et $aa''a'$; par cette tangente que nous appellerons aT, et par le point S, faisons passer un plan aST. Ce plan sera tangent au cône, et par conséquent il coupera le plan du cercle $bb'b''$, suivant une ligne bT qui sera tangente en b à ce cercle, et qui rencontrera la tangente aT en un point T (fig. 2) situé sur la ligne $AA'A''$.

Or, le cercle $bb'b''$ et sa tangente bT sont connus. On peut construire aisément la tangente bT, puis déterminer le point T, et par suite le point de contact a, et le problême sera résolu.

Il faut remarquer que l'autre tangente Ta (fig. 2), donne une seconde solution. Ce qui provient de ce que la ligne $AA'A''$ convient à deux séries différentes de sphères tangentes.

Voyez d'autres solutions synthétiques de ce problême,

1°. Correspondance sur l'Ecole Polytechnique, tome Ier., pages 18-28; *même tome*, pages 194-195, solution de M. Cauchy; tome II, pages 420-425, article de M. Dupin;

2°. Journal de l'Ecole Polytechnique, 7me. et 8me. cahiers, page 2-9, Mémoire de Fermat sur le contact des sphères, traduit du latin par M. Hachette; *même journal*, 16me. cahier, page 124, Mémoire de M. Gaultier de Tours.

On trouvera les solutions analytiques de ce problême, 1°. Bulletin de la Société philomatique, septembre 1812, par M. Poisson; 2°. tome II de la Correspondance, pages 63 et 409, par M. Français; 3°. journal de l'Ecole Polytechnique, 17me. cahier, deux solutions, l'une de M. Binet, l'autre de M. Hachette.

Construire par la ligne droite et le cercle, les points d'intersection d'un hyperboloïde de révolution et d'une droite donnée; par M. LAMÉ, *élève.*

La droite donnée en tournant autour de l'axe de l'hyperboloïde engendre un autre hyperboloïde, qui coupe le premier suivant deux cercles; la question proposée sera résolue, si l'on détermine les centres et les rayons de ces cercles. Soient (fig. 3, pl. 2) OA, OO' les rayons des cercles de gorge de deux hyperboloïdes de révolution, qui ont pour axe commun la perpendiculaire O au plan de ces cercles, et nommons *premier hyperboloïde*, celui dont le cercle de gorge est du plus petit rayon. Menons parallèlement à l'axe de révolution, et par une tangente ab au cercle de gorge de ce premier hyperboloïde, un plan qui coupe le second hyperboloïde suivant une hyperbole H. Le même hyperboloïde étant coupé par un plan méridien parallèle, suivant une autre hyperbole H', les deux hyperboles H et H' sont semblables, et leurs axes réels sont dans le rapport des rayons OA, OO' des deux cercles de gorge. Le plan de l'hyperbole H contient une génératrice G du premier hyperboloïde; soit C le point où cette génératrice coupe l'axe réel ab de l'hyperbole; le point homologue C' de l'hyperbole semblable H', divise l'axe réel AB en deux parties AC', $C'B$ qui sont entre elles dans le rapport de aC à Cb; donc si par le point C' on mène une parallèle G' à la génératrice G, les points d'intersection de cette parallèle et de l'hyperbole H', seront les homologues des points d'intersection de la génératrice G et de l'hyperbole H. On sait construire avec la ligne droite et le cercle les points d'intersection de l'hyperbole méridienne H' et de la droite G'; donc on connaîtra les points d'intersection de l'hyperbole H et de la droite G. Les perpendiculaires abaissées de ces points sur l'axe de révolution, déterminent les cercles d'intersection des deux hyperboloïdes. La même considération s'applique à la recherche de l'intersection d'un ellipsoïde de révolution et d'une droite, en supposant que la section méridienne soit donnée.

On déduira facilement de ce qui précède la solution de cette question (en ne faisant usage que de la ligne droite et du cercle):

Mener par une droite donnée, un plan tangent à un hyperboloïde ou un ellipsoïde de révolution.

Questions de Mathématiques et de Physique, proposées au concours général des lycées de Paris, année 1814.

MM. Frédéric Latour, Privezac et Lamé, admis cette année (1814-1815) à l'Ecole Polytechnique, ont remporté les deux premiers prix de Mathématiques, et le premier accessit.

Problème de mathématiques.

Etant donné un cône droit dans lequel le rayon de la base est le tiers de l'apothême, si l'on prend sur la surface du cône un point situé à la distance a du sommet, et que de ce point, comme centre, avec une ouverture de compas égale à r, on trace sur la surface du cône une courbe, laquelle pourrait être considérée comme l'intersection de cette surface avec celle de la sphère qui a son centre au point donné, et dont le rayon est r;

Si ensuite on développe la surface convexe du cône en une surface plane, laquelle sera un secteur circulaire, dont l'angle est $\frac{4}{3}$ d'angle droit, on demande l'équation de la courbe tracée sur la surface du cône, et devenue plane par le développement de cette même surface en un secteur plan : l'équation de la courbe étant trouvée en général pour toutes les valeurs de r et de a, on fera $a = 3$, $r = 2$, et on déterminera pour ce cas particulier la figure exacte de la courbe, en la traçant dans toute son étendue.

On examinera de plus si la courbe est décrite toute entière par le compas qui tourne autour du point donné, ou s'il n'y a qu'une partie de la courbe décrite par ce procédé, et quelle est cette partie.

Solution de M. Frédéric Latour. (Premier Prix.)

Concevons le cône et la sphère décrite du point donné A, fig. 4 pl. 2, et supposons un plan horisontal HB qui coupe ces deux surfaces, respectivement suivant un cercle que nous projeterons sur la base du cône. Joignons enfin leurs centres et un de leurs points d'intersection, nous formerons ainsi un triangle EFG.

Cela posé, il est clair que le plan méridien passant par le point F contiendra les points de la courbe situés à la hauteur HB, ou, ce qui est la même chose, à la distance SB du sommet; et que, par conséquent, l'un de ces points se trouverait sur la génératrice passant

par le point L, qui, dans le développement, fera avec la génératrice SK un angle qui aura pour mesure un arc égal en longueur à LK, décrit du rayon SK; mais l'angle EGF a pour mesure le même arc décrit d'un rayon trois fois moindre; il est donc triple du précédent; en sorte que l'équation polaire de la courbe que l'on cherche ne dépend que d'une relation entre $SB = v$, $EGF = 3u$; or, le triangle EGF donne:

$$\cos EGF = \frac{\overline{EG}^2 + \overline{GF}^2 - \overline{EF}^2}{2\,EG \times GF},$$

$$EGF = 3u, \quad EG = \frac{1}{3} SA = \frac{1}{3} a, \quad GF = \frac{1}{3} SB = \frac{1}{3} v,$$

$$\overline{EF}^2 = r^2 - \overline{BC}^2 = r^2 - \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = r^2 - (a - v)^2$$

$$+ \frac{1}{9}(a - v)^2 = r^2 - \frac{8}{9}(a - v)^2;$$

d'où

$$\cos 3u = \frac{a^2 + v^2 - 9r^2 + 8(a - v)^2}{2\,av},$$

ou

$$\cos 3u = 1 - \frac{9}{2}\left\{\frac{r^2 - (a - v)^2}{av}\right\};$$

telle est l'équation polaire de la courbe en comptant les angles, à partir de la génératrice qui passe par le point donné, et les rayons vecteurs, à partir du sommet du cône.

Si dans cette équation on fait $a = 3$, $r = 2$, on trouve:

$$\cos 3u = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{4 - (3 - v)^2}{v}\right);$$

d'où

$$v = \frac{8 + \cos 3u}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{19 + \cos^2 3u + 16 \cos 3u},$$

Sous la première forme, l'équation nous montre à cause des trois valeurs de u correspondantes à une valeur de $\cos 3u$, que si l'on partage la circonférence en trois secteurs de $\frac{4}{3}$ d'angle droit chacun, la courbe sera symétrique dans chacun de ces secteurs; en sorte qu'il suffira de voir sa forme entre les lignes PB', PB (fig. 5); mais CB, sur laquelle on compte les angles, partageant BPB' en deux parties égales, la même forme d'équation fait voir que la portion de la courbe comprise entre ces deux droites, sera symétrique au-dessus

et au-dessous de PC; en sorte qu'il suffit de la discuter dans l'angle BPC; c'est-à-dire, depuis $\cos 3u = -1$, jusqu'à $\cos 3u = +1$; les valeurs de v correspondantes sont :

$$v = \frac{7 \pm 2}{3} \left\{ \begin{array}{l} = 3, \\ = \frac{5}{3} \end{array} \right. \qquad v = 3 \pm 2 \left\} \begin{array}{l} = 1 \\ = 5 \end{array} \right. ;$$

or, en prenant le signe positif pour le radical, on voit facilement que $\cos 3u$ augmentant depuis -1 jusqu'à $+1$, v augmente depuis 3 jusqu'à 5; donc la courbe aura à-peu-près la forme EC, si $PE = 3$, $PC = 5$. Il y aura une autre branche (ce) séparée de la première, pour laquelle $Pe = \frac{5}{3}$, $Pc = 1$; car il est facile de prouver qu'il n'existe pas de courbe entre le point e et le point E; pour cela faisons $v = 3 - \delta$ dans la première équation, δ étant moindre que Ee, et par conséquent moindre que 2, nous aurons :

$$\cos 3u = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{4 - \delta^2}{3 - \delta}\right) :$$

or, $\frac{3}{2}\left(\frac{4 - \delta^2}{3 - \delta}\right)$ est positif, si $\delta < 2$; et il faudra que l'on ait : $\frac{3}{2}\left(\frac{4 - \delta^2}{3 - \delta}\right) < 2$, ou au plus égal; delà on tire $\delta > \frac{4}{3}$ ou égal; d'où $v < 3 - \frac{4}{3} < \frac{5}{3}$, ou au plus égal, quand $\cos 3u = -1$, c'est-à-dire, sur le rayon PB.

Enfin la génération de la courbe fait voir que la plus grande valeur du rayon vecteur sera $PC = 3 + 2$, et la plus petite $Pc = 3 - 2$; donc si on achève la courbe dans les autres angles où elle est symétrique, et que l'on décrive quatre cercles avec les rayons 5, 3, $\frac{5}{3}$, 1 et du centre P, la courbe sera toute entière comprise dans le cercle PC qu'elle touchera aux points C, G, L; elle se composera de deux courbes distinctes, l'une comprise entre ce premier cercle et le cercle PE qu'elle touchera aux points E, N, I; l'autre comprise entre les cercles décrits du rayon Pc qu'elle touchera aux points c, g, l, et du rayon Pe qu'elle touchera aux points e, n, i : il n'y aura rien dans le cercle Pc, rien entre les cercles Pe, PE.

On voit que le cône développé ne fournira que le secteur BPB'; en sorte que le compas n'aura décrit que la courbe comprise dans cet espace, ou le tiers de la courbe entière.

Solution de M. Privezac. (Deuxième Prix.)

Par le sommet P, fig. 6, pl. 2, du cône et le point A donné sur la surface, je mène l'apothême PB; suivant cette droite prolongée indéfiniment; je conduis un plan XPM tangent au cône, et je suppose que le développement de ce cône se fasse sur le plan tangent (*), ou que le cône roule sur ce plan, son sommet restant fixe.

Soit M' un point de la courbe à double courbure tracée sur la surface conique, et soit M ce même point lorsqu'elle est devenue plane; pour déterminer la position du point M, ou plutôt la courbe sur laquelle il est situé, j'emploierai les coordonnées polaires, appelant v le rayon vecteur PM et α l'angle qu'il fait avec la droite PX en tournant autour du pôle P.

Cela posé, en observant que la distance du point M' au sommet P ne change pas dans le développement, le triangle APM' donne d'après un principe de trigonométrie rectiligne :

$$r^2 = a^2 + v^2 - 2\,av \cos APM'.$$

Cette équation donne une relation entre v et l'angle APM'; mais comme nous voulons l'obtenir entre v et α, il faut prendre la valeur de $\cos APM'$ en fonction de α et de quantités connues. Or, dans l'angle solide trièdre formé par les plans CPB, CBD, DPB, on a, en vertu d'une formule très-simple de trigonométrie sphérique, $\cos APM' = \cos^2 BPC + \sin^2 BPC \cos BCD$; car les angles BPC, DPC sont égaux, et l'angle BCD mesure celui des plans BPC, DPC. Mais dans le triangle BPC rectangle en C, on a :

$$\sin^2 BPC = \frac{\overline{CB}^2}{\overline{PB}^2} = \frac{1}{m^2},$$

$$\cos^2 BPC = \frac{\overline{CP}^2}{\overline{PB}^2} = \frac{\overline{PB}^2 - \overline{CB}^2}{\overline{PB}^2} = \frac{m^2 - 1}{m^2},$$

en supposant pour résoudre la question dans un cas plus général, que l'apothême du cône est égal à m fois le rayon de la base. De plus, si BD' est la portion de l'arc du secteur sur laquelle s'est appliqué l'arc BD par le développement, les angles BCD et $BPD' = \alpha$ seront en raison inverse des rayons CB et PB, ce qui donne l'angle $BCD = m\,\alpha$, donc:

$$\cos APM' = \frac{m^2 - 1 + \cos m\alpha}{m^2}.$$

(*) Ce plan peut être considéré comme celui de la feuille.

On en déduit que l'équation de la courbe est, en la résolvant par rapport à cos $m\alpha$:

$$\cos m\alpha = 1 - \frac{m^2(r^2 - (a - v)^2)}{2av}.$$

Cette forme est simple et peut servir à trouver aisément les limites de la courbe ; car on sait que celles de cos $m\alpha$ sont 1 et — 1.

Équation qu'il s'agit de discuter et construire. (Suit la discussion de cette équation) (*).

PROBLÈME DE PHYSIQUE.

Après avoir expliqué la construction de la pompe foulante, et la cause et les progrès de l'ascension de l'eau à chaque coup de piston, on examinera lequel des deux est le plus avantageux, de placer la soupape, ou en bas du tuyau d'aspiration, ou bien à la jonction de ce tuyau avec le corps de pompe.

On fera voir dans quel cas l'eau peut s'arrêter dans le tuyau d'aspiration ou dans le corps de pompe, quoique le piston, lorsqu'il est au plus bas point de sa course, ne soit pas à 32 pieds au-dessous du niveau de l'eau qu'il faut élever.

1^er. Prix.	Blanchet.	{ N'est point entré à l'Ecole.
2^e. Prix.	Médous..	{ Admis à l'Ecole Polytechnique.

(*) *Note sur l'intersection d'un cône à base fermée par une surface fermée, et sur la dernière partie du problème de mathématiques, proposé au dernier concours général des lycées de Paris.*

La courbe d'intersection du cône et de la surface est nécessairement fermée, et quand on rapporte cette courbe sur le développement du cône, elle devient une courbe plane fermée ou infinie, et dans les deux hypothèses, elle est composée de parties égales, dont les extrémités se réunissent ou ne se réunissent pas.

Pour concevoir comment une ligne tracée sur un cône, a plus d'étendue sur le développement de ce cône que sur le cône même, on peut supposer le cône enveloppé par une toile sans épaisseur, qu'on a pliée un nombre indéfini de fois sur elle-même. Un plan ou toute autre surface coupe les diverses couches de l'enveloppe, suivant une même ligne, qui peut être composée de plusieurs branches ; or, toutes les couches superposées, sont séparées sur le développement du cône ; donc la courbe d'un cône, doit avoir sur le développement de ce cône, plus d'étendue que la courbe elle-même ; examinons les deux cas où elle sera fermée ou infinie.

Le développement du cône correspond a un secteur, dont les rayons extrêmes représentent la même arête du cône. L'arc qui mesure l'angle de ces rayons est, ou n'est pas une partie aliquote de la circonférence ; dans le premier cas, les courbes fermées du cône sont encor des courbes fermées sur le développement, et dans le second cas, elles sont infinies, ce qui est évident. H. C

§. II. MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

Analyse du premier Mémoire (*) *sur la stabilité des corps flottans ; par M.* CH. DUPIN, capitaine en premier au corps du génie maritime, correspondant de l'Institut.

Mémoire présenté à la premier classe de l'Institut de France, le 10 janvier 1814.

Enhardi par l'indulgence avec laquelle la première classe de l'Institut a daigné recevoir et approuver nos premiers Mémoires, en les déclarant dignes d'entrer dans sa collection des Savans étrangers, nous osons aujourd'hui lui présenter le commencement des applications de notre théorie de la courbure des surfaces. Dans ce nouveau travail, nous avons dû laisser la méthode qui nous avait conduits jusqu'ici, pour suivre une marche nouvelle.

En exposant la première partie de nos recherches, nous n'étions occupés que de la seule théorie. Les applications, que parfois nous avons présentées, n'étaient que de simples aperçus, jetés en avant pour répandre plus de jour sur des vérités abstraites, et rendre ainsi leur succession moins aride, en offrant d'espace en espace des exemples faits pour parler à l'imagination. Sans négliger les observations et les vérités de détail, nous avons cherché sur-tout à poser des principes simples et généraux, pour qu'ils pussent être faciles et féconds en conséquences. Essayons maintenant d'appliquer ces résultats à des questions d'un très-fréquent usage ; par là nous rendrons de plus en plus sensible l'esprit de notre méthode.

Si jamais elle peut être de quelque intérêt, ce sera sur-tout lorsqu'on la verra s'étendre à des sujets, dont on a depuis longtems apprécié le besoin et l'importance.

Parmi les questions traitées jusqu'ici par les seules lois de la mécanique, l'une de plus intéressantes, est sans contredit celle dont le but est de déterminer l'équilibre, et la stabilité des corps solides flottant sur des fluides. De sa solution dépend nécessairement la sûreté, et à beaucoup d'égards le perfectionnement de la navigation. D'ailleurs une foule de recherches physiques, et mille usages des arts se rapportent à ce problème remarquable.

(*) Ce Mémoire, sur le rapport d'une commission composée de MM. Sané, Prony et Carnot, rapporteur, a été déclaré digne de l'approbation de la Classe, et de l'insertion dans sa Collection des savans étrangers.

Mais quoiqu'on n'ait encore envisagé cette question que comme étant du ressort de l'hydrostatique, il est facile de voir qu'elle peut être ramenée à des considérations purement géométriques ; et comme ces considérations peuvent toutes être fournies par la théorie de la courbure des surfaces, nous allons nous en occuper, pour offrir ainsi la première application étendue de cette même théorie.

En traitant un sujet illustré déja par les travaux des savans les plus célèbres, si tout n'est pas épuisé, si nous sommes assez heureux pour parvenir à quelque vérité nouvelle, nous n'attribuerons sa découverte qu'à la marche que nous avons suivie ; et, moins nous avons eû de mérite à nous laisser conduire où elle nous menait, plus sa bonté sera prouvée aux yeux des vrais géomètres : hâtons nous d'entrer en matière.

Le théorême qui sert de principe fondamental à tout ce Mémoire, se trouve énoncé, mais sans démonstration, dans mon Mémoire *sur la description des lignes et des surfaces du second degré*, écrit en 1805, pendant mon séjour en Belgique, puis inséré dans le journal de l'Ecole Polytechnique, XIV^e. cahier.

Toute l'application relative à la stabilité, faisait d'abord partie de mon premier Mémoire sur la courbure des surfaces ; mais le sujet s'étendant à mesure que je voulais l'approfondir, je me suis vu forcé d'en faire l'objet d'un travail à part : c'est celui dont j'ai l'honneur d'entretenir la classe.

Je ne dirai qu'un mot des principes très-connus sur lesquels il repose.

Je présente d'abord les premières notions mathématiques de la pesanteur des corps, de la comparaison de leur poids et de leur volume ; ce qui me conduit à donner la définition de la densité qu'on peut appeler en géométrie le rapport du volume réel des corps à leur volume apparent.

J'emprunte à la mécanique le seul principe du levier ; j'en déduis les principales propriétés des momens et des centres de gravité.

Je considère ensuite l'état d'un solide flottant sur un fluide, et je démontre que le solide ne peut rester en équilibre sur le fluide à moins que les deux conditions suivantes ne soient remplies :

1°. Le poids du corps flottant doit être égal au poids de tout le fluide déplacé par ce corps.

2°. Le centre de gravité du corps flottant et celui qu'occuperait le fluide déplacé, si tout à coup ce fluide reprenait sa première position ; ces deux centres, dis-je, doivent être situés sur la même verticale.

Nous disons un mot de l'équilibre des solides qui flottent sur des

fluides compressibles, ou qui sont plongés dans ces fluides. C'est ainsi que les aérostats peuvent se trouver suspendus dans l'atmosphère.

Ces vérités préliminaires une fois établies, nous passons de la situation précise de l'équilibre aux situations les plus voisines, dans lesquelles on peut placer un corps flottant.

Alors le problême se présente sous trois aspects bien distincts: ou le corps flottant, lorsqu'on commence à le déranger de sa position d'équilibre, revient de lui-même à sa première assiète, où il s'en écarte de plus en plus : ou enfin, il est certaines directions suivant lesquelles en dérangeant son équilibre, il revient de lui-même à la première position ; tandis que, sous toutes les autres directions, il s'écarte de plus en plus de cette même position.

Dans le premier cas, on désigne l'état d'équilibre du corps flottant en disant qu'il est *stable*. Dans le second cas, on dit que cet équilibre est *instable*, ou non stable. Dans le troisième enfin, qu'il n'a qu'une stabilité relative (*).

Le but de nos recherches, en considérant des corps flottans, dont la forme ait toute la généralité imaginable, est de déterminer les conditions des trois genres d'équilibre qui peuvent leur convenir, et les propriétés les plus remarquables de ces trois genres. C'est à développer ainsi notre plan, et les premiers théorêmes sur lesquels nous nous fondons, qu'est consacrée la première partie du premier Mémoire.

Lorsqu'un corps est plongé dans un fluide, on appelle *carène* le volume apparent de la partie immergée, terminée en dessus par le niveau du fluide, ou le plan horisontal de flottaison, et en dessous par la surface extérieure du corps flottant. (Lorsque nous parlons de la *surface d'un corps flottant*, c'est toujours de sa *surface extérieure* que nous entendons parler.)

Pour plus de brièveté, nous appellons simplement *centre de carène*, le centre de gravité de la carène, lequel est évidemment le même que le centre de gravité du fluide déplacé, lorsque ce fluide, comme l'eau par exemple, est dans toutes ses parties d'une égale densité ; or, tel est le cas que nous considérons.

Le poids total du corps flottant et la forme de sa surface extérieure restant les mêmes, si nous supposons qu'on déplace seule-

(*) Pour se rapprocher davantage des idées que rappellent dans le langage ordinaire, les expressions de *stabilité* et d'*instabilité*, il faudrait appeler non stable, l'équilibre qui tend à se rompre en tout sens, et réserver la qualification d'instable à cet équilibre qui, sous des directions différentes, est stable ou ne l'est pas.

ment quelques parties intérieurs, alors ou le centre de gravité de ce corps aura toujours sa première position, ou il se trouvera lui-même déplacé.

Dans la première hypothèse, il est évident que le déplacement des parties intérieures du corps flottant n'apportant aucun changement à la figure de la carène, aucun des élémens dont dépend sa position d'équilibre n'ayant varié, cette position doit encore se conserver la même.

Dans la seconde hypothèse, il faut examiner séparément deux cas bien distincts. En considérant la position primitive où le corps flottant était en équilibre, et la verticale qui passait alors par le centre de gravité, ce centre peut s'être déplacé sans quitter cette verticale, ou s'être déplacé en la quittant.

Dans le premier cas de cette seconde hypothèse, on voit encore que rien n'est changé dans les conditions de l'équilibre, et le centre de la carène primitive se trouvant toujours sur la même verticale que le nouveau centre de gravité, est encore le centre qui convient au nouvel état d'équilibre; cet état est donc le même que le précédent.

Delà résulte une conséquence très-simple, mais qui néanmoins mérite d'être remarquée. C'est que si l'on permet au corps flottant de descendre ou de monter verticalement, de manière à ce que le plan de flottaison soit toujours parallèle à un même plan fixe dans le corps, le flotteur ne pourra trouver dans ces états divers, qu'une seule positition d'équilibre, en quelque point qu'on suppose le centre de gravité du corps flottant.

Passons enfin au second cas de la seconde hypothèse. Dans la première position d'équilibre, le centre de gravité du corps flottant et le centre de la carène étaient sur la même verticale; on suppose que le premier centre sorte de cette verticale: donc il faut que le second en sorte aussi pour que l'équilibre puisse encore avoir lieu; donc une nouvelle carène, et par conséquent un nouveau plan de flottaison appartiennent à ce nouvel équilibre.

Concevons maintenant que le centre de gravité du corps flottant prenne successivement toutes les positions imaginables dans l'intérieur du corps flottant; le centre de carène, et le plan de flottaison vont prendre pareillement une infinité de positions différentes; de manière que tous les centres de carène vont former une première surface; tandis que tous les plans de flottaison vont envelopper une autre surface.

On verra que la considération de ces deux surfaces suffit pour nous conduire à tous les résultats qu'on peut desirer sur la stabilité des corps flottans.

Pour plus de brièveté, nous appellerons *carénide*, la première des deux surfaces dont nous parlons : ainsi la carénide est le lieu de tous les centres de carêne.

Chacune des carènes dont le centre est placé sur cette surface a pour propriété caractéristique, d'avoir un volume égal à celui de la quantité constante du fluide déplacé par le corps flottant, dont le poids est supposé constant.

On peut donc donner de la *carénide* et de la surface enveloppe des flottaisons, cette définition purement géométrique. En supposant qu'un plan coupant retranche du corps flottant un segment d'un volume invariable, et que ce plan prenne ensuite toutes les positions possibles; d'après un telle hypothèse,

1°. Tous les centres de volume de ces segmens formeront par leur ensemble là surface que nous avons appellée *carénide ;*

2°. Tous ces plans coupans seront à-la-fois tangens à la surface des flottaisons, qui sera par conséquent leur surface enveloppe.

Parlons d'abord des propriétés de la première surface. Nous supposerons généralement dans ce que nous allons dire, que le corps flottant n'a qu'une étendue limitée, ce qui est le cas de la nature. Mais le corps flottant peut d'ailleurs être terminé par une seule nappe régulière, ou par la réunion de plusieurs; il peut même présenter les formes les plus arbitraires, sans que les résultats que nous allons exposer perdent pour cela rien de leur généralité.

La carénide est une surface toute entière enveloppée par la surface extérieure du corps flottant (*) ; elle est donc toujours d'une étendue limitée.

Elle offre d'abord pour caractère d'avoir, en chaque point, ses deux courbures constamment dirigées dans le même sens.

Et si l'on place le corps flottant dans une de ses positions d'équilibre; puis qu'on détermine sur la carénide le centre de la carène correspondant, le plan tangent en ce point *à la carénide* sera nécessairement parallèle au plan de flottaison : il sera donc horisontal.

Donc aussi la verticale qui, dans la position d'équilibre, joint le centre de gravité du corps flottant avec le centre de carène ; cette verticale, disons-nous, est nécessairement *normale* à la carénide.

(*) Ceci suppose que la surface extérieure du corps flottant n'ait pas de parties trop concaves : dans ce cas, la surface canéride serait limitée par la surface développable qui circonscrirait extérieurement ces cavités. De manière que chaque arête de la surface développable toucherait le corps flottant en deux points qui limiteraient la seule partie de la surface développable que l'on devrait considérer.

Par ce premier aperçu, l'on voit déja que si la carénide était connue, la recherche des positions d'équilibre qui conviennent à chaque nouvelle position du centre de gravité du corps flottant, se réduirait à la simple recherche des normales de la carénide qui passent par ce point; que par conséquent le nombre des positions d'équilibre est toujours égal au nombre de ces normales, etc. Mais n'anticipons point sur l'ordre que nous devons suivre.

Puisque les lignes droites qui joignent les centres correspondans de la carène et du corps flottant, sont les normales d'une seule et même surface (la carénide), toutes les propriétés générales qui conviennent aux normales des surfaces appartiennent également à ces lignes droites. On voit donc que leur ensemble présente deux systêmes bien distincts de surfaces développables, tels que les surfaces développables d'un systême sont coupées à angle droit par toutes les développables de l'autre systême; que de plus, chacune de ces développables coupe la surface des centres de carène suivant une de ses lignes de courbure, etc.

Ce sont ces surfaces développables, les lignes et les centres de courbure qui leur correspondent, qui vont nous faire connaître tout ce qui peut être relatif à la stabilité des corps flottans.

Supposons qu'un corps flottant, placé d'abord dans une de ses positions d'équilibre en soit tout à coup infiniment peu dérangé, sans que pour cela le centre de gravité de ce corps ait cessé de rester au même point dans ce corps. Nous supposons aussi que le poids du corps flottant n'a pas varié.

Ce dérangement quel qu'il soit, peut toujours être regardé comme composé, 1°. d'un mouvement vertical de translation du centre de gravité; 2°. d'un petit mouvement de rotation autour d'une droite horisontale menée par ce même centre.

Maintenant si nous faisons tourner la carénide, c'est-à-dire, la surface lieu de tous les centres de carène, autour de l'axe horisontal dont nous parlons, cette carénide aura pour enveloppe une certaine surface; et alors il faudra distinguer trois cas également remarquables.

Ou l'enveloppe de la carène l'enveloppera, la circonscrira réellement; ou elle en sera totalement enveloppée (à partir du centre de carène qui correspond à la position d'équilibre qu'on considère);

Ou enfin les deux surfaces se pénétreront, de manière qu'une partie de la première sera hors de la seconde, tandis que l'autre partie de celle-ci sera dans l'autre partie de la première surface.

Or, dans le premier cas, l'équilibre *n'est pas stable*; dans le second cas, il *est stable*; dans le troisième cas enfin, l'équilibre *est*

indifférent, c'es-à-dire, que par rapport à l'axe horisontal autour duquel s'est opéré le dérangement qu'on considère, l'équilibre une fois dérangé, tend à se troubler de plus en plus dans le premier cas; à se rétablir, dans le second; et enfin, dans le troisième cas à conserver sa nouvelle assiète.

Présentées ainsi, les conditions de l'équilibre des corps flottans ne s'offriraient pas sous une forme assez simple pour être généralement et facilement saisies : réduisons les choses à leur expression la plus élémentaire.

Si, à partir d'une position d'équilibre donnée, nous inclinons un peu le corps flottant, en le faisant tourner autour d'une horisontale quelconque, et qu'ensuite nous menions, par le centre de gravité, un plan perpendiculaire à cette droite, ce plan étant vertical passera par le centre de carène correspondant à la position d'équilibre, et en ce point il coupera la *carénide* suivant une certaine ligne; concevons que pour le même point on détermine le *centre de courbure* de cette ligne.

Maintenant, si le centre de gravité du corps flottant est au-dessous de ce *centre de courbure*, l'équilibre du corps flottant est nécessairement *stable*.

Si le centre de gravité est au-dessus du centre de courbure, l'équilibre est nécessairement *instable*.

Et enfin l'équilibre est *indifférent* quand ces deux centres coïncident.

Delà résulte ce théorême qui paraît digne de remarque.

En comparant une position d'équilibre d'un corps flottant, avec les positions très-voisines qu'il peut prendre, la distance de son centre de gravité au centre de la carène, est un minimum *ou un* maximum, *suivant que l'équilibre est stable ou non stable: dans l'équilibre indifférent cette distance est constante.*

Si maintenant nous comparons entre eux les divers degrés de stabilité d'un même corps flottant, suivant qu'à partir de sa position d'équilibre, on l'incline successivement autour de tous les axes horisontaux possibles, un nouvel ordre de propriétés va se présenter à nous :

En se plaçant au centre de la carène qui appartient à la position d'équilibre que l'on considère, et traçant ensuite les lignes de plus grande et de moindre courbure de la surface carénide, qui passent par ce point,

1°. Lorsque l'axe d'inclinaison sera parallèle à la direction *de moindre* courbure, ce sera la direction *de la moindre* stabilité du corps flottant;

2°. Lorsque l'axe d'inclinaison sera parallèle à la direction *de plus grande* courbure, ce sera la direction *de la plus grande* stabilité du corps flottant.

Or, en chaque point d'une surface quelconque, les deux directions de plus grande et de moindre courbure se croisent toujours à angle droit.

Donc aussi les deux directions de plus grande et de moindre stabilité d'un corps flottant quelconque se croisent toujours à angle droit.

Si nous voulons comparer ces stabilités principales aux stabilités intermédiaires, nous pouvons le faire de la manière la plus simple au moyen de la courbe *indicatrice* de la surface *carénide;* car cette *indicatrice* étant déterminée pour le centre de la carène qui correspond à la position d'équilibre qu'on considère, les divers degrés de stabilité sont proportionnels aux carrés des diamètres de cette courbe, augmentés ou diminués d'une quantité constante.

Mais les diamètres de la courbe indicatrice sont placés symétriquement à droite et à gauche des axes de cette courbe. Donc à droite et à gauche des directions de plus grande et de moindre stabilité du corps flottant, les degrés de stabilité qui correspondent aux inclinaisons symétriquement placées sont pareillement égales entre elles. Des mêmes principes résulte encore cet autre théorême.

En déterminant les divers systêmes de tangentes conjugées (*) de la surface carénide, au centre de carène qui correspond à la position d'équilibre, chaque tangente représentant la direction d'une inclinaison du corps flottant; concevons ensuite qu'on ajoute ensemble les quantités qui représentent les degrés de stabilité qui correspondent aux directions conjuguées, prises deux à deux; alors la somme de deux stabilités conjuguées sera nécessairement constante.

Et comme les directions de plus grande et de moindre stabilité du corps flottant, sont aussi deux directions conjuguées de la surface carénide; il suit delà que la somme de deux stabilités conjuguées quelconques, est précisément égale à la somme de la plus grande et de la moindre stabilité du corps flottant.

Après avoir exposé les premières propriétés de la carénide, ou surface des centres de carène, il faut considérer la surface enveloppe des flottaisons. Cette surface est, ainsi que nous l'avons dit, définie par la propriété d'avoir pour plan tangent les plans de

---

(*) Voyez pour l'exposition de la théorie des tangentes conjuguées, le premier et le second Mémoires *des développemens de géométrie*, par M. Dupin.

flottaison qui terminent toutes les carènes d'égal volume que nous avons considérées.

Or, cette enveloppe des flottaisons est, comme la surface carénide, fermée de toutes parts; elle présente partout ses deux courbures dans le même sens : enfin elle embrasse complettement la surface carénide, ou est partout embrassée par elle, comme celle-ci l'est par la surface extérieure du corps flottant.

De manière que la carénide et l'enveloppe des flottaisons ne peuvent jamais se pénétrer.

On sait que chaque plan de flottaison est coupé par les plans de flottaison infiniment voisins, suivant une droite qui passe toujours par le centre de gravité de l'aire du premier plan : l'aire étant terminée par la surface extérieure du corps flottant. Ce beau théorême est dû à Lacroix, géomètre français du siècle passé.

En combinant ce principe avec la théorie des enveloppes, on voit que la surface enveloppe des flottaisons, comme la carénide, est le lieu de tous les centres de carène.

A l'aide de ces propriétés, nous démontrons les principes suivans.

I.

Le plus grand rayon de courbure de la surface des centres de carène, est pour chaque centre de carène que l'on considère, égal au plus grand moment d'inertie de l'aire de la flottaison correspondante, divisé par le volume de la carène.

II.

Le plus petit rayon de courbure est au contraire égal au plus petit de ces momens divisé par le volume de carène.

III.

La direction de la plus grand courbure de la carénide est celle de l'axe de plus grand moment d'inertie de l'aire de la flottaison.

IV.

La direction de la moindre courbure de la carénide est celle de l'axe du plus petit moment d'inertie de l'aire de la flottaison.

Les mêmes principes font connaître la grandeur des rayons de courbure de toutes les autres sections normales de la surface carénide.

Et comme la détermination des divers degrés de stabilité d'un corps flottant incliné tour à tour suivant toutes les directions, dépend immédiatement de la valeur de ces rayons de courbure, nous obtenons ainsi la mesure la plus simple de ces divers degrés de

stabilité. Il est facile de voir qu'elle concorde avec les beaux résultats présentés pour la première fois par Bouguer, dans son *Traité du navire*, et par Euler, dans sa *Scientia navalis*.

Comme les quantités desquelles dépend cette mesure de la stabilité, sont indépendantes de la situation horisontale des divers points de la carène et de l'aire de la flottaison, on conçoit qu'on peut altérer d'une infinité de manières différentes la forme d'un corps dont le poids est constant, sans que ce corps, en flottant toujours sur le même fluide, change pour cela de stabilité.

Dans ces diverses transformations éprouvées par la figure du corps flottant, nous cherchons à voir ce que deviennent la surface carénide et la surface enveloppe des flottaisons. Nous faisons voir qu'alors ces dernières surfaces éprouvent des transformations analogues à celles dont nous avons donné les conditions dans la 1re. partie de cet ouvrage, au sujet des surfaces qui doivent conserver entre elles au moins un contact du second ordre. Par conséquent ces surfaces conservent encore absolument la même courbure aux points qui correspondent à la position d'équilibre dont on s'occupe. Donc non-seulement alors la position d'équilibre du corps flottant est conservée, mais les degrés de stabilité qui correspondent à ces positions sont absolument restés les mêmes, ainsi que les directions de ces stabilités.

Pour terminer ce que, dans ce Mémoire, nous devons dire sur les propriétés générales de la surface enveloppe des flottaisons, il faut trouver pour chacun de ses points la direction des lignes de courbure et la grandeur des deux rayons de courbure.

Recherche des lignes et des rayons de courbure de la surface des flottaisons.

Si nous prenons un point sur l'enveloppe des flottaisons, et qu'après avoir déterminé le plan des flottaisons qui correspond à ce point, nous concevions tous les autres plans de flottaison voisins du premier *avec lequel ils forment un angle constant*, chacun de ces plans et le premier intercepteront dans le corps flottant deux onglets qui seront réunis par la droite intersection des deux plans.

Or, cette droite est tangente à la ligne de plus grande ou de moindre courbure de la surface des flottaisons, suivant que la différence de volume des deux onglets est un *minimum* ou un *maximum*.

Maintenant concevons que la surface extérieure du corps flottant devienne cylindrique, tout le long du contour de la flottaison que l'on considère. Alors les plans de flottaison infiniment voisins in-

tercepteront dans ce cylindre de nouveaux onglets. La différence de ces nouveaux onglets avec les premiers compris entre les mêmes plans, est un filet triangulaire ayant une de ses faces sur le cylindre, la seconde sur la surface extérieure du corps flottant, la troisième sur le plan de flottaison infiniment voisin du plan que l'on considère.

Et suivant que le volume total de filet triangulaire, est un *minimum* ou un *maximum*, la droite intersection des deux plans de flottaison qui le déterminent est tangente aux lignes de plus grande et de moindre courbure.

Présentons enfin une troisième expression de cette direction des lignes de courbure.

Si l'on applique à chaque point du contour de la flottaison un poids proportionnel à la tangente de l'angle formé par la verticale et la surface du corps flottant, on va former une ligne pesante.

Or, les axes principaux du plus grand et du plus petit moment d'inertie de cette ligne, seront respectivement tangens aux lignes de moindre et de plus grande courbure de la surface enveloppe des flottaisons.

Et, de plus, si l'on divise tour-à-tour par la superficie de la flottaison, ce plus grand et ce plus petit moment d'inertie, les quotiens seront respectivement les rayons de moindre et de plus grande courbure de la surface enveloppe des flottaisons.

Lorsque nous exposerons ce qui concerne la stabilité des vaisseaux, ce qui fera l'objet d'un Mémoire à part, on verra que ce n'est pas pour nous livrer à des recherches de pure curiosité que nous avons ainsi déterminé les élémens de la courbure de la surface enveloppe des flottaisons. Car la connaissance de ces élémens peut offrir une foule de données précieuses sur les qualités des navires, et sur plusieurs opérations des arts maritimes.

Tels sont les objets contenus dans le second paragraphe; dans le troisième et dernier, au lieu de supposer que le centre du corps flottant varie de position, pour parvenir à connaître les lois générales de la stabilité, nous supposons que le centre de gravité conserve toujours la même position dans le corps flottant, et nous tâchons de déterminer les diverses positions d'équilibre qui peuvent convenir à cette position unique du centre de gravité.

Déja nous savons que la recherche de ces positions d'équilibre est ramenée à la détermination des diverses normales qu'on peut, à partir du centre de gravité du corps flottant, abaisser sur la surface carénide.

Chacune de ces normales étant supposée verticale, le corps se trouvera successivement dans toutes ses positions d'équilibre.

Suivant que ces normales seront le *maximum* ou le *minimum* de la distance du centre de gravité aux divers centres de carène, elles correspondront à des positions d'équilibre *stables* ou non stables.

Et, comme d'un point quelconque, on peut toujours abaisser une normale au moins sur une surface donnée (cette normale indiquant la plus courte distance du point à la surface), concluons premièrement que, quelle que soit la forme du corps flottant, il peut toujours être placé dans une position d'équilibre, *et d'équilibre stable*. Ce principe qui devient extrêmement simple dans notre théorie, n'avait, ce nous semble, pas encore été démontré.

Limitons d'abord nos recherches, en plaçant dans le corps flottant un axe, dont la direction soit fixe, mais d'ailleurs quelconque, horisontale ou non; et n'envisageons que les diverses positions d'équilibre qui peuvent exister d'après cette hypothèse.

Au lieu de la surface entière des centres de carene, nous n'avons plus à considérer qu'une ligne, lieu des centres de carène qui peuvent convenir à l'axe fixe. Or, cette ligne étant une courbe fermée, nous faisons voir que le nombre de ses normales qui passent par le centre de gravité est pair, et que ces normales sont alternativement des *maxima* et des *minima*.

Donc le nombre des positions d'équilibre est pair, et l'équilibre est alternativement stable et non stable, lorsqu'on tourne régulièrement autour de l'axe fixe. De célèbres géomètres ont déjà démontré ce principe en supposant cet axe horisontal. (Voyez la Mécanique de M. Poisson.)

Nous considérons en particulier un cas remarquable. C'est celui où quelques normales ne peuvent être regardées, ni comme des *maxima*, ni comme des *minima*. Ce cas arrive lorsque le centre de courbure de la ligne, lieu des centres de carène, se confond avec le centre de gravité du corps flottant. Nous faisons voir que, dans ce cas, pour que les théorèmes précédens puissent avoir lieu, il faut et l'on peut regarder chacune de ces positions particulières, comme la réunion de deux états d'équilibre, l'un stable et l'autre non stable.

Mais ce qui est le plus remarquable, c'est qu'en supprimant par la pensée ces positions d'équilibre mixte, les autres positions d'équilibre sont encore alternativement stables ou non stables, comme si les premières n'existaient absolument pa .

Passant enfin au cas général, nous prouvons que quand un corps fini quelconque flotte sur un fluide, sans être retenu par

aucun axe fixe, premièrement, il a au moins deux positions d'équilibre, l'une dont la stabilité est absolue, l'autre dont l'instabilité est pareillement absolue.

Secondement, que le nombre total des positions d'équilibre stable est toujours égal au nombre des positions d'équilibre non stable.

Telles sont les principales propriétés exposées dans ce premier Mémoire.

Le second présentera leur application aux surfaces du second degré en général; et, comme un corollaire, la démonstration des théorêmes exposés dans le beau livre d'Archimède, *De insidentibus in humido*, tous ces théorêmes seront ramenés à un seul et même principe.

Enfin, un troisième Mémoire sera consacré spécialement à la stabilité des vaisseaux, et présentera les divers principes qu'on peut en déduire relativement à la théorie des constructions navales. C'est alors que nous trouverons l'occasion de rendre hommage aux belles recherches d'Euler et de Bouguer, qui contiennent à-peu-près tout ce qu'on sait encore à ce sujet. C. D.

Extrait de l'ouvrage de M. DE PRONY, *publié en* 1804, *sur la théorie des eaux courantes*, 1 vol. in-4°. de 130 pages, 5 tableaux d'expériences, et 2 pl.; *par M.* HACHETTE.

PRINCIPAUX RÉSULTATS de l'expérience, qui peuvent fournir les données nécessaires, pour asseoir les bases d'une théorie du mouvement des fluides incompressibles et pesans.

Premier résultat. Un fluide comme l'eau, qui s'écoule par un tuyau ou par un canal, d'une longueur suffisante pour qu'il puisse y établir son régime, éprouve des résistances dues à des forces rétardatrices de même ordre que la force accélératrice de la pesanteur; d'où il suit que ces forces doivent non-seulement diminuer l'effet de la pesanteur d'une quantité finie, mais encor l'anéantir, et réduire le mouvement à l'uniformité.

Second résultat. Les résistances qui modifient l'effet de la pesanteur, sont, dans une section transversale quelconque d'un liquide en mouvement, indépendantes des pressions des molécules comprises dans cette section. (Expériences de Dubuat, Dobenheim et Benezech.)

Troisième résultat. Dans une section transversale quelconque, les diverses molécules ont perpendiculairement à cette section, ou parallèlement à la directrice, des vîtesses différentes. Il y a un point de cette section, ou se trouve le *maximum* de vitesse. Dans un tuyau cylindrique, ce point est au centre de la section transversale circulaire. Dans un canal découvert, il est en général audessous de la surface, et si dans le plan de la section, on imagine une ligne droite menée de ce point à un point quelconque du perimètre de cette section, les vîtesses des points de cette ligne diminuent progressivement.

Quatrième résultat. La diversité des matières avec lesquelles on construit le canal ou le tuyau, ne fait pas varier sensiblement la résistance du liquide en mouvement, qui provient de l'action attractive des parois.

Cinquième résultat. Les molécules d'eau adhèrent les unes aux autres; ce qui constitue ce qu'en physique on appelle la *cohésion* ou la *viscosité*.

Historique.

Les premières déterminations dignes d'attention sur le mouvement de l'eau dans les canaux, en tenant compte des résistances, sont de M. Demery, qui travaillait avec Perronet en 1775, au projet du canal de l'Yvette.

En 1779, parut l'ouvrage de M. Dubuat (les Principes d'hydraulique); ce célèbre ingénieur en a publié une seconde édition en 1789, avec des augmentations considérables.

En 1800, M. Coulomb fit un Mémoire sur des expériences destinées à déterminer la cohérence des liquides, et les lois de leurs résistances dans les mouvemens très-lents. L'auteur satisfait aux phénomènes, en égalant la résistance à une fonction entière et rationnelle de la vîtesse, composée de deux termes, l'un proportionnel à la vîtesse simple, et l'autre au carré de cette vîtesse. M. Girard a le premier appliqué la loi de M. Coulomb aux cas des vîtesses que l'eau prend en coulant dans des lits naturels et factices; mais il a donné le même coefficient à la première et à la seconde puissance de la vîtesse; et par cette raison, ses formules n'ont pas toute la généralité desirable.

M. de Prony, après avoir recueilli les meilleures observations faites sur l'écoulement des liquides, s'est proposé de trouver des formules d'interpolation, qui fussent d'accord avec l'expérience. Il a d'abord résolu par deux méthodes, l'une graphique et l'autre analytique, le problème suivant :

Problême. Plusieurs résultats d'observations sont susceptibles d'être liés entre eux par une loi; en faisant à ces résultats de petites

corrections, l'équation qui exprime cette loi, peut se mettre sous la forme :

$$Z = a + bX,$$

Z et X étant des fonctions d'une ou de plusieurs variables, dont on a un certain nombre de valeurs observées immédiatement, ou calculées d'après les observations; il s'agit d'assigner aux constantes inconnues α et β, des valeurs telles que les phénomènes soient représentés le mieux possible, par l'équation précédente.

La solution de ce problème s'applique à l'équation de cette forme :

$$(E) \qquad L = au + bu^2,$$

u étant la vîtesse moyenne de l'eau dans un tuyau, a et b des constantes à déterminer d'après les expériences, et L une fonction donnée par la théorie, composée des quantités qui représentent le diamètre du tuyau, la pente, les charges d'eau sur l'une et l'autre extrémité.

Les constantes a et b ont été déterminées, de manière que l'équation (E) fût satisfaite par 51 expériences sur des tuyaux, dont les diamètres variaient depuis 3 jusqu'à 50 centimètres, et les longueurs depuis 3 mètres jusqu'à 2300 mètres. Les vîtesses observées et calculées par cette équation, ne différaient entre elles que des fractions $\frac{1}{25}$ ou $\frac{1}{30}$, en plus ou en moins.

La vîtesse moyenne est toujours connue dans les expériences sur les tuyaux, par la comparaison du volume d'eau écoulé en un tems déterminé avec la section transversale; il n'en est pas de même des expériences sur les canaux découverts, où la vîtesse moyenne se déduit ordinairement de la vîtesse à la surface. M. Prony a représenté ces vîtesses par les lettres u et v, et il a supposé qu'elles étaient liées entre elles par l'équation :

$$u = \frac{v(v+a)}{v+b},$$

a et b étant des constantes qui doivent satisfaire aux observations. Il a regardé l'expression $a'u^2 + b'u^2$ comme une fonction donnée par la théorie entre la longueur du canal, la pente, la section transversale et le périmètre de cette section; il s'est servi des expériences connues, pour déterminer avec précision les constantes a' et b'.

Les formules suivantes sont le résultat du travail de M. Prony.

FORMULES

pour le mouvement des eaux dans les canaux découverts rectilignes.

Quantités données.

λ longueur du canal ; ζ différence de niveau entre les deux sections extrêmes ;

$I = \dfrac{\zeta}{\lambda}$ pente du canal par mètre ; ω sa section transversale ; χ son périmètre ;

$R = \dfrac{\omega}{\chi}$ rapport de l'aire de la section transversale à son périmètre ;

U la vîtesse moyenne ; V la vîtesse à la surface ;

Q le volume d'eau qui passe par la section ω pendant chaque unité de tems.

Formules.

$$
(A) \left\{
\begin{array}{ll}
a\,(1) & U = -0{,}175 + \sqrt{0{,}03 + 3688\, IR}, \\
a\,(2) & U = -0{,}07 + \sqrt{0{,}005 + 3233\, IR}, \\
a\,(3) & U = 0{,}82\, V, \\
a\,(4) & U = \dfrac{4}{5}\, V. \text{ (Celle-ci qui est la plus simple,} \\
 & \text{est suffisante pour l'usage ordinaire.)}
\end{array}
\right\} \qquad (1)
$$

$$Q = U\omega, \qquad (2)$$

$$aU + bU^2 = \frac{I\omega}{\chi} = IR\,; \quad a = 0{,}0000444499\,; \quad b = 0{,}000309314. \qquad (3)$$

Les équations (1), (2), (3) renferment les six quantités I, ω, χ, U, V et Q ; trois de ces quantités étant données, on déterminera les trois autres.

La formule a (2) satisfait à trente-une expériences très-soignées, dont vingt trois ont été faites par M. Dubuat.

La formule (3) satisfait à dix expériences de Dubuat et deux de Chezy.

FORMULES

pour le mouvement des eaux dans les tuyaux cylindriques.

Données.

λ longueur du tuyau ;
D son diamètre ;
Z différence de niveau entre la surface de l'eau dans le réservoir supérieur, et celle de l'eau dans le bassin inférieur, ou charge de l'eau sur l'orifice inférieur ;
U la vîtesse moyenne;
Q la dépense d'eau dans l'unité de tems.

Formules.

$$(B)\quad U = -0{,}0248829 + \sqrt{0{,}000619159 + 717{,}857\,\frac{DZ}{\lambda}}\,;$$

lorsque la vîtesse de l'eau ne sera pas très-petite, on pourra substituer à cette formule (B), celle-ci (4):

$$U = 26{,}79\sqrt{\frac{DZ}{\lambda}}, \tag{4}$$

formule unique comprenant le systême de formules (A) pag. 227, et la formule (B),

$$(C)\quad U = -0{,}0469734 + \sqrt{0{,}0022065 + (3041{,}47)\,G},$$

formule dans laquelle G représente la quantité RI pour les canaux découverts (page 227), et $\frac{DZ}{4\lambda}$ pour les tuyaux cylindriques.

$$Q = \frac{4Q}{\pi D^2} \qquad (\pi = 3{,}1416), \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{Z}{\lambda}D^5 - \alpha' QD^2 - \beta' Q^2 = 0, \\ &\alpha' = 0{,}000088268, \quad \beta' = 0{,}0022583. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Au moyen des trois équations (4), (5) et (6) entre les cinq quantités λ, D, Z, U et Q, deux étant données, on déterminera les trois autres.

La formule (B) satisfait à 51 expériences, la plupart faites par MM. Bossut et Dubuat, sur des conduites qui avaient depuis 3 jusqu'à 50 centimètres de diamètre, et depuis 3 mètres jusqu'à 2300 mètres de longueur.

Observations relatives aux formules de M. de Prony.

La formule (4) pag. 228, fait voir que la vîtesse suit sensiblement la raison directe composée des racines carrées du diamètre et de la charge d'eau, et inverse de la racine de la longueur du tuyau.

On a supposé que les sections horisontales, tant du réservoir de prise d'eau que du bassin où cette eau va se rendre, sont tellement grandes par rapport à la section transversale du tuyau, que les tranches horisontales du fluide dans ce réservoir et ce bassin, peuvent être considérées comme immobiles, ou comme ayant une vîtesse insensible par rapport à celle de l'eau dans ce tuyau.

Les formules relatives aux longs tuyaux, ne s'appliquent pas au calcul de l'écoulement par un orifice pratiqué dans une mince paroi, ou par un petit agutage.

Nous ferons connaître à la fin de cet extrait, un travail de M. de Prony, sur l'écoulement des fluides contenus dans un vase, par des orifices horisontaux.

Problême relatif au mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite cylindriques.

Un réservoir supérieur de distribution est alimenté par un courant, de manière à pouvoir fournir, sans que sa profondeur diminue, une quantité totale d'eau par jour, qu'il s'agit de répartir à des fontaines, ou à des bassins inférieurs, par le moyen de tuyaux de conduite, dans des rapports donnés qu'on suppose être ceux des nombres n', n'', n''', etc.

Nommant Q la quantité totale d'eau, et Q', Q'', Q''', les quantités d'eau respectives qui arriveront aux fontaines ou aux bassins, et s'assujétissant à la condition précédente, on aûra d'abord :

$$Q' = \frac{n'}{n'+n''+n'''+\text{etc.}}\,Q, \qquad Q'' = \frac{n''}{n'+n''+n'''+\text{etc.}}\,Q,$$

D', D'', D''', etc. étant les diamètres respectifs de ces tuyaux, et J', J'', J''', etc. les valeurs de $\frac{Z}{\lambda}$ correspondantes à ces diamètres, on aura pour déterminer les diamètres, autant d'équations semblables à l'équation (6) page 228, qu'il y a de diamètres :

$$J'D'^5 - \alpha' Q' D'^2 - \beta' Q'^2 = 0,$$
$$J''D''^5 - \alpha' Q'' D''^2 - \beta' Q''^2 = 0,$$
etc.

Problême relatif à l'élévation des eaux dans des tuyaux de conduite, au moyen de pistons.

Les machines hydrauliques destinées a élever l'eau, opèrent le plus souvent cette élévation, sur-tout lorsque la hauteur est considérable, en refoulant le fluide dans des tuyaux de conduite. L'effort auquel ce moteur doit continuellement faire équilibre, se compose, 1°. du poids d'une colonne d'eau, dont la base est ordinairement celle d'un piston, et dont la hauteur est la différence de niveau entre le réservoir inférieur et le bassin supérieur; 2°. de plusieurs résistances provenant de l'inertie des masses qui ont un mouvement alternatif, et des frottemens des pistons, axes, tourillons, etc.; 3°. enfin de la résistance au mouvement de l'eau qui a lieu dans le tuyau.

On demande qu'elle sera la pression sur la base du piston, provenant tant du poids que du mouvement du fluide?

La valeur de cette pression est:

$$\frac{1}{4} g \pi D^2 \zeta + \frac{4 \lambda Q}{D} \left(\alpha + \frac{4 \beta}{\pi} \cdot \frac{Q}{D^2} \right),$$

expression dans laquelle les constantes ont pour valeurs:

$$g = 9,8088, \quad \pi = 3,1416, \quad \alpha = 0,00017, \quad \beta = 0,003416;$$

D est le diamètre du tuyau; Q la dépense dans l'unité de tems; ζ est la hauteur à laquelle l'eau est élevée, et la densité de l'eau est prise pour unité.

Quatre tableaux terminent l'ouvrage de M. de Prony. Ils contiennent les résultats des meilleurs expériences faites sur le mouvement des liquides, et la comparaison, tant des résultats de l'observation que de ceux qu'on obtient par les formules de MM. Dubuat, Girard et Prony. On conclut de cette comparaison, que les formules de M. de Prony sont celles qui s'accordent le plus avec l'expérience, et que dans l'état actuel de la science, elles suppléent autant que possible, au défaut d'une théorie complette.

M. de Prony avait déja publié en 1802, un Mémoire sur le jaugeage des eaux courantes. Il indique dans ce Mémoire deux moyens pour mesurer les quantités d'eau qui s'écoulent par un orifice horisontal ou vertical. De ces deux moyens, l'un très-simple et très-économique se réduit à exécuter ce qui est prescrit par la règle suivante:

« Choisissez une partie du lit du ruisseau, dont on puisse prendre « commodément plusieurs profils en travers, la distance ou lon- « gueur comprise entre les deux sections extrêmes étant 100, 200, etc.

« mètres, autant que les localités le permettront; établissez au « point le plus bas de cette longueur un barrage avec un pertuis, « et au point le plus haut un batardeau avec une vanne disposée « de manière qu'on puisse la fermer instantanément. Cette vanne « étant maintenue à une ouverture fixe, demeurera levée jusqu'à « ce que l'eau soit au même niveau et dans le lit du ruisseau, et « dans le réservoir compris entre le batardeau et le barrage du « pertuis qu'on suppose fermé; ce dont on s'assurera au moyen de « deux flotteurs (*), communiquant l'un avec le lit du ruisseau, « et l'autre avec le réservoir. Lorsque cette condition sera rem- « plie, on fermera instantanément la vanne, et l'on ouvrira le « pertuis. L'eau du réservoir s'écoulera, et l'on observera les abais- « semens successifs du niveau de l'eau dans ce réservoir, qui « correspondent à de très-petits intervalles de tems, par exemple, « des secondes. Connaissant d'ailleurs par les profils du lit du « ruisseau, les volumes des tranches horisontales du réservoir d'une « petite épaisseur, par exemple, d'un centimètre, on calculera « par les formules d'interpolation connues, l'écoulement qui cor- « respond au niveau constant de l'eau dans le ruisseau. »

Observations.

Le niveau de l'eau dans la plupart des ruisseaux, varie suivant les saisons et suivant les années; ce n'est donc que par des expériences répétées à diverses époques, qu'on peut obtenir une mesure moyenne des eaux courantes d'une rivière ou d'un ruisseau.

La distance que M. de Prony conseille de mettre entre la vanne et le pertuis, doit être la plus grande possible, afin de diminuer l'influence des mouvemens intérieurs de l'eau du réservoir sur l'écoulement par le pertuis.

On épargnerait le travail qu'exige la mesure des profils en travers du lit de la rivière, en établissant, ainsi que M. de Prony l'a proposé, sur la portion du lit qui sert de réservoir, deux bordages parallèles, composés de planches posées horisontalement et de champ, et fixées par des clous sur des piquets. Cette disposition aurait pour objet de donner une base constante aux différens prismes d'eau écoulés, qui correspondent aux différens tems de l'écoulement. Les bordages auraient environ 4 à 5 décimètres de hauteur, a compter de leur arête supérieure qui serait au niveau des eaux de la rivière.

(*) Un tube recourbé communique par une extrémité avec l'eau dont il s'agit de mesurer le niveau; il se prolonge sous terre horisontalement, et se relève verticalement au-dessus du sol. Cette branche verticale reçoit un flotteur qui porte une tige, dont l'extrémité répond aux divisions d'une échelle tracée sur une règle verticale.

Tandis que le réservoir se vide par le pertuis, il ne doit recevoir aucune partie des eaux de la rivière ou du ruisseau en amont du batardeau ; il est donc nécessaire que le lit de la rivière puisse contenir les eaux retenues par le batardeau, et dans le cas contraire, il faudra prâtiquer des rigoles, pour conduire les eaux de l'amont du batardeau à l'aval du pertuis.

Si dans les expériences sur les écoulemens, les tems correspondans aux changemens de niveau, sont très-rapprochés, on pourra considérer les différences constantes du tems, comme les différentielles constantes d'une abscisse de courbe, et les différences variables des hauteurs verticales du niveau de l'eau, comme les différentielles de l'ordonnée qui correspond à l'abscisse. Alors la question sera ramenée à trouver la tangente à la courbe, qui correspond à l'origine des coordonnées ; l'abscisse de cette tangente sera le tems de l'écoulement du niveau constant du lit de la rivière, et l'ordonnée correspondante à cette abscisse représentera la quantité d'eau écoulée. M. de Prony a résolu cette question dans ses feuilles d'analyse (Journal de l'École Polytechnique, 3e. cahier), et a donné la formule d'interpolation qui s'applique au cas particulier des écoulemens dans des tems très-rapprochés. Si cette formule ne satisfait pas aux expériences, on pourra y substituer la méthode exposée dans son Mémoire sur le *Jaujeage des eaux courantes.*

Sur l'écoulement des liquides par des orifices horisontaux.

M. de Prony a fait imprimer en l'an 5 (1796), une solution du problême de l'écoulement des fluides incompressibles et pesans, par des orifices horisontaux, dans l'hypothèse du parallélisme des tranches. Après avoir observé que la solution de d'Alembert, donnée en 1744, dans son Traité des fluides, est incomplette, parce que la considération de la pression des tranches fluides y est omise, il a soumis cette question a un nouveau calcul entre les quantités désignées par le tableau ci-joint. (*Voyez la page suivante.*)

La notation posée, M. de Prony parvient aux deux équations suivantes :

$$p = Q + gz - \frac{n\omega\, du}{dt} - \frac{1}{2}(m^2 - \mu^2)\, u^2,$$

$$p = P - g(h - z) + \frac{(N - n)\,\omega\, du}{dt} + \frac{1}{2}\mu^2 u^2;$$

d'où l'on pourrait déduire une troisième équation qui ne contiendrait ni $\frac{du}{dt}$, ni $u^2 = 2g\xi$, et qui donnerait pour un point dé-

terminé de la masse fluide, la relation entre la pression p et la vitesse $\sqrt{2g\xi}$, qui a lieu à l'orifice en même tems que cette pression.

Au moyen de ces équations (dit M. de Prony), on déterminera sans difficulté le *maximum* de vîtesse. Dans les circonstances les plus ordinaires, la vîtesse acquiert une valeur fort approchante de son *maximum*, au bout d'un tems très-court, et qui s'abrège d'autant plus que l'orifice est plus petit. (Voyez la Correspondance, tome Ier., pag. 289; et la Mécanique de M. Poisson, tome II, page 444.)

ÉCOULEMENT DES LIQUIDES PAR DES ORIFICES HORISONTAUX. — DÉSIGNATION DES QUANTITÉS.	Lettres qui représentent les quantités. — Variables.	Constantes données.
Aire de la surface supérieure du fluide.	. . . . .	Ω
Aire d'une section horisontale quelconque de la masse fluide.	k	
Aire de l'orifice inférieur par où le fluide s'écoule.	ω	
Pression rapportée à l'unité de surface { sur l'aire Ω. . . .	. . . . .	Q
Pression rapportée à l'unité de surface { sur l'aire k.	p	
Pression rapportée à l'unité de surface { sur l'aire ω.	. . . . .	P
Distance verticale entre les sections Ω et ω.	. . . . .	h
Distance verticale entre les sections Ω et k.	z	
Vîtesse de la tranche infiniment mince et horisontale correspondante { à la section k. . . .	v	
Vîtesse de la tranche infiniment mince et horisontale correspondante { à l'orifice ω.	u	
Hauteur due à la vîtesse u du fluide à l'orifice.	ξ	
Hauteur d'un prisme de fluide ayant l'orifice ω pour base, et un volume égal à celui du fluide écoulé par cet orifice, pendant le tems t.	ρ	
$1-\frac{\omega^2}{k^2}$	μ^2	
$1-\frac{\omega^2}{\Omega^2}$	m^2	
Intégrale de $\frac{\delta z}{k}$ prise { dans l'étendue de z.	n	
Intégrale de $\frac{\delta z}{k}$ prise { dans l'étendue de h.	N	
Densité du fluide.	1	
Le tems écoulé depuis le commencement du mouvement. . .	t	

Nota. La caractéristique δ indique les variations qui ne dépendent pas du tems, mais seulement de la distance de deux sections horisontales infiniment voisines; la caractéristique d indique les variations qui dépendent du mouvement d'un tranche élémentaire ou de son déplacement pendant l'instant dt.

Extrait d'un Mémoire, ayant pour titre : Théorie plus complète des machines qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau ; par L. Euler, académie de Berlin, Mémoires de l'année 1754 ; *par M.* Hachette.

Description d'une machine hydraulique, fig. 7, pl. 2.

L'axe autour duquel la machine doit tourner uniformément, est vertical. Cette machine est composée d'un tambour creux de forme conique, et d'une enveloppe extérieure de même forme, qui tourne avec le tambour. Au-dessus de cet appareil, est un réservoir fixe, d'où l'eau s'écoule dans l'espace compris entre le tambour et son enveloppe extérieure. Cet espace est ouvert par le haut, et fermé dans la partie inférieure par un disque, autour duquel sont placés plusieurs petits tuyaux ouverts par les deux bouts. Ces tuyaux sont coudés suivant les tangentes a un même cercle. La base inférieure du tambour mobile est d'un plus grand diamètre que la base supérieure. Le réservoir fixe a aussi la forme d'un tambour. Au fond de ce réservoir se trouvent plusieurs canaux séparés par de minces diaphragmes, qui servent à diriger l'eau sous l'inclinaison requise. Si le réservoir fournit autant d'eau qu'il en sort par les embouchures des tuyaux, les tuyaux sont constamment pleins d'eau, et le mouvement de rotation de la machine devient bientôt uniforme.

Euler conclut de la théorie de cette machine que, pour obtenir le plus grand effet possible, la vîtesse de l'eau par les embouchures des tuyaux doit être précisément égale à la vîtesse même de ces embouchures; auquel cas l'eau en s'échappant tombe verticalement.

Rapport fait à la Classe des sciences Physique et Mathématiques de l'Institut, sur un ouvrage imprimé de M. Hachette, *ayant pour titre :* Supplément à la Géométrie descriptive *de M.* Monge. (*Séance du lundi 23 mars* 1812.)

(M. Carnot, *Commissaire.*)

La Classe m'a chargé de lui rendre compte d'un ouvrage imprimé de M Hachette, ayant pour titre : *Supplément à la Géométrie descriptive.*

Le but de la Géométrie descriptive est de représenter sur des

surfaces planes, qui n'ont que deux dimensions, les objets qui en ont trois; et réciproquement de retrouver la forme de ces objets à trois dimensions, d'après les dessins qui les représentent sur ces surfaces planes.

Le moyen qu'on employe pour y parvenir, consiste à faire sur ces plans les projections des corps proposés.

La science des projections en général se divise en deux branches, dont l'une est l'exécution raisonnée, mais purement graphique de ces projections, et l'autre est leur théorie purement analytique.

Quoique ces deux branches de la même science ne soient, à proprement parler, que deux méthodes différentes de traiter les mêmes questions, leurs procédés respectifs ont entre eux si peu d'analogie apparente, que l'identité constante de leurs résultats forme des rapprochemens continuels, dont on ne peut s'empêcher d'être frappé. On admire la correspondance intime de deux sciences qui vont toujours d'un pas égal; dont l'une n'employant jamais le calcul, semble être entièrement du domaine de l'imagination, et dont l'autre ne tirant du fond de la question que les données strictement nécessaires pour l'expression algébrique des conditions proposées, laisse ensuite à l'analyse la plus abstraite, la plus dégagée de toute autre considération, le soin de dénouer successivement toutes les difficultés, et de ramener enfin aux résultats les plus élémentaires que puisse comporter la nature de la question.

Cet accord imperturbable de ce que l'analyse a de plus transcendant, avec ce que la synthèse offre de plus simple et cependant de plus subtil, donne la satisfaction de voir deux théories si disparates au premier aspect, se confirmer cependant l'une par l'autre, s'expliquer, se généraliser réciproquement; l'une en un mot, former des tableaux qui parlent aux yeux, tandis que l'autre s'occupe à les décrire aussi fidèlement qu'exactement dans la langue qui lui est propre.

Plusieurs auteurs ont traité séparement les deux branches de la science des projections sans s'apercevoir, ou du moins sans faire remarquer leur liaison. D'autres au contraire les ont traitées conjointement, sans chercher à les isoler l'une de l'autre: Clairaut, par exemple, donna, dès 1741, un Traité particulier des courbes à double courbure, qui se rapporte à la branche analytique; et longtems auparavant Philibert de Lorme, Mathurin Jousse, le Père Deran, Larue avaient donné l'art du trait appliqué à la coupe des pierres et à la charpente, lequel se rapporte à la partie purement graphique des projections Enfin M. Frezier, ingénieur en chef à Landau, avait traité conjointement de l'une et de l'autre, sous le nom de stéréotomie, dans un ouvrage savant et rempli d'applications curieuses et utiles.

Mais les méthodes de pure théorie n'étaient d'aucun usage dans les arts; les méthodes de simple pratique imaginées par des hommes industrieux, étaient reçues aveuglement et comme traditions par leurs successeurs, et les méthodes mixtes n'étaient accessibles qu'aux personnes plus qu'initiées dans la science du calcul. D'ailleurs toutes ces méthodes avaient l'inconvénient d'être trop restreintes, et applicables seulement à des cas particuliers.

M. Monge est, comme on le sait, celui qui a fait prendre une face nouvelle à la science des projections, considérée dans toute sa généralité. Il en a soigneusement séparé les branches, en même tems qu'il en a fait ressortir l'intimité et les rapports: les discussions analytiques l'ont conduit à de profondes spéculations sur les équations aux différences partielles. Quant à ce qui regarde les projections purement graphiques, le but et le résultat des travaux de M. Monge a été de ramener cette science à des principes généraux, et à des règles uniformes, à une pratique tout à-la-fois facile et rigoureuse; d'en faire un corps de doctrine utile aux artistes qui ne connaîtraient que les élémens de la géométrie ordinaire, et d'en étendre enfin les applications à une foule d'objets qui paraissent n'avoir entre eux que des rapports très-éloignés.

Personne n'ignore non plus les services qu'a rendus à cette science usuelle M. Lacroix, l'un des premiers qui se soient occupés d'en développer les bases et de les mettre à la portée de tous les lecteurs, par la clarté et la précision de l'écrit (*Complément des élémens de Géométrie*, 1 vol. in-8°.) qu'il a publié sur cette matière.

Diverses circonstances ayant empêché que M. Monge ne complétât les travaux qu'il avait entrepris sur ce sujet et sur ses applications, M. Hachette s'est proposé de remplir les lacunes. Déja il a publié plusieurs ouvrages qui ont cette destination; tels que l'*Essai sur la composition des machines*, qu'il a composé en commun avec MM. Lanz et Bétancourt, et le *Traité des machines*, qu'il présenta l'année dernière à la classe. Aujourd'hui il lui offre, sous le titre de *Supplément à la géométrie descriptive*, une série de questions particulières qu'il a classées pour être rapportées respectivement à chacun des cinq paragraphes qui composent la Géométrie descriptive de M. Monge, et c'est de ce supplément que la classe m'a chargé de lui rendre compte.

Le premier paragraphe de M. Hachette explique la génération des surfaces courbes, et ce qu'on doit entendre par les surfaces développables, leur arête de rembroussement, leur séparation en deux nappes par cette arête, leur axe de développement qui répond à l'axe des abscisses dans les courbes planes. Il y donne des notions générales sur les surfaces de révolution, les surfaces enveloppes, et particu-

lièrement les surfaces du second degré qu'il réduit à cinq ; savoir . *l'ellipsoïde*, *l'hyperboloïde à une nappe*, *l'hyperboloïde à deux nappes*, *le paraboloïde elliptique*, et le *paraboloïde hyperbolique*. M. Hachette démontre diverses propositions nouvelles relatives à ces surfaces.

Le second paragraphe contient quelques développemens relatifs au paragraphe correspondant de la géométrie descriptive de M. Monge.

Le troisième traite du contact des surfaces courbes. On y fait voir que le plan tangent à un point quelconque contient nécessairement les tangentes de toutes les sections planes, ou à double courbure, qui passent par ce point. On y résout d'une manière nouvelle ce problème utile par son application dans les arts graphiques : trouver la courbe de contact d'une surface de révolution, ou d'une surface engendrée par la ligne droite, avec une surface conique qui a son sommet en un point donné de l'espace. On y traite en particulier du contact des sphères, et on y résout par des considérations purement géométriques les problêmes relatifs à cet objet; problêmes que Fermat avait autrefois traités d'une manière très-élégante et très-simple, à la manière des anciens.

Le quatrième paragraphe traite des intersections des surfaces. M. Hachette applique particulièrement sa méthode de discussion aux surfaces du second degré et aux courbes à double courbure qui résultent de l'intersection des cônes et cylindres du second degré.

Le paragraphe cinq est relatif aux courbes à double courbure décrites par un point qui se meut suivant une loi donnée. M. Hachette a pris pour exemples de ces courbes l'hélice décrite sur un cylindre et l'épicycloïde sphérique. Il avait déja fait des applications très-intéressantes de ces considérations, dans son Traité des machines, pour expliquer la théorie de la vis d'Archimède, et des engrenages cylindriques et coniques.

M. Hachette termine son ouvrage par la solution graphique de tous les problêmes relatifs à la trigonométrie sphérique, et par l'explication de quelques épures relatives à des problêmes énoncés dans la géometrie de M. Monge. L'exactitude, ainsi que la netteté du dessin, y est remarquable, et c'est une chose précieuse dans cette géometrie.

Le travail de M. Hachette m'a paru digne de figurer à la suite de l'ouvrage dont il est le supplément; et les savans, ainsi que les artistes, accueillleront sûrement avec plaisir la promesse que fait l'auteur de compléter le Cours entier de géométrie descriptive par un second supplément, qui contiendra la stéréotomie, la perspective et les ombres.

§. III. PHYSIQUE.

Mémoire sur la réfraction de la lumière; par M. Ampère.

Lu à l'Institut, le 27 mars 1815.

L'auteur de ce mémoire met sous une forme très-simple les valeurs de deux lignes qui déterminent la position d'un plan tangent à une surface donnée, et il emploie ces valeurs ainsi transformées, à démontrer ce théorême :

« Si dans le milieu où entre le rayon et par le point où il rencontre la surface réfringente, on conçoit une infinité de droites dont les unes représentent des rayons réfractés, et les autres les prolongemens des rayons incidens; qu'on prenne sur ces lignes, à partir de leur intersection mutuelle, des distances qui soient en raison inverse des vîtesses de la lumière suivant leurs directions, savoir, pour les premières, en raison inverse des vîtesses qui ont lieu après la réfraction, et pour les secondes, de celles qui ont lieu auparavant; si par les points ainsi déterminés on conçoit ensuite deux surfaces, dont l'une passe par tous ceux qui se trouvent sur les rayons réfractés, et l'autre par tous ceux qui sont situés sur les prolongemens des rayons incidens; qu'enfin on mène deux plans, dont l'un soit tangent à la première surface au point où elle rencontre un rayon réfracté, et l'autre le soit à la seconde, au point où elle rencontre le prolongement du rayon incident correspondant, la commune intersection de ces deux plans tangens sera dans le plan qui sépare les deux milieux. »

De ce théorême sur les lois du mouvement de la lumière passant successivement par différens milieux, dépend la solution de toutes les questions relatives à la réfraction ordinaire et extraordinaire. Pour donner une idée suffisante du travail de M. Ampère, nous commencerons par ce qui est relatif à la détermination du plan tangent à une surface courbe; nous rappellerons ensuite les lois du mouvement de la lumière dans le cas dont nous parlons, telles qu'elles ont été données par M. Laplace, dans les Mémoires de l'Institut de 1809, et nous terminerons cette note par la démonstration du théorême qui est le principal objet du mémoire.

Si l'on représente par x, y, z, les trois coordonnées d'un des points d'une surface courbe, par ξ, η, ζ, les coordonnées du plan

qui la touche à ce point, et qu'on suppose pour abréger $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$, on aura pour l'équation du plan tangent :

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y).$$

En faisant $\zeta = 0$ et $\eta = 0$ dans cette équation, on aura pour la partie de l'axe de x comprise entre l'origine et le plan tangent :

$$\xi = \frac{px+qy-z}{p},$$

et en y faisant $\zeta = 0$ et $\xi = 0$, on trouvera que la partie de l'axe des y comprise entre l'origine et le même plan est :

$$\eta = \frac{px+qy-z}{q}.$$

Les deux points déterminés par ces valeurs suffisent avec le point de contact pour donner la position du plan tangent, et on peut rendre très-simples les expressions de ξ et de η, en changeant les variables indépendantes de la manière suivante :

Si l'on nomme s et t les tangentes des angles que forment avec l'axe des z les projections sur les plans des xz et des yz de la droite menée de l'origine au point de contact, on aura $x = sz$, et $y = tz$; en substituant ces valeurs dans l'équation de la surface représentée en général par $F(x, y, z) = 0$, elle deviendra $f(s, t, z) = 0$, où l'on pourra considérer z comme une fonction des deux variables indépendantes s et t, on en tirera en la différenciant les valeurs de $\frac{dz}{ds}$, et de $\frac{dz}{dt}$ prises dans cette supposition; et comme on aura d'ailleurs :

$$\frac{dz}{ds} = p\frac{dx}{ds} + q\frac{dy}{ds} = pz + ps\frac{dz}{ds} + qt\frac{dz}{ds},$$

ce qui donne :

$$\frac{dz}{ds} = \frac{pz}{1-ps-qt} = \frac{pz^2}{z-px-qy} = -\frac{z^2}{\xi},$$

et qu'on trouvera de même :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{qz}{1-ps-qt} = \frac{qz^2}{z-px-qy} = -\frac{z^2}{\eta},$$

on en conclura pour ξ et η ces valeurs très-simples :

$$\xi = -\frac{z^2}{\frac{dz}{ds}} = -\frac{1}{\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{ds}},$$

et

$$\eta = -\frac{z^2}{\frac{dz}{dt}} = -\frac{1}{\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dt}}.$$

M. Laplace a ramené tous les phénomènes de la réfraction ordinaire et extraordinaire à deux principes, dont le premier consiste en ce que la vîtesse de la lumière, dans un milieu, ne dépend en aucune manière de la forme de la surface qui termine ce milieu, ni de la nature de ceux qu'elle a pu traverser avant d'y entrer. En sorte que dans un milieu non cristallisé, cette vîtesse est une constante déterminée, et que, dans un milieu cristallisé, elle ne peut dépendre que de la direction du rayon relativement aux axes de cristallisation.

Le second principe est celui de la moindre action, en vertu duquel, si l'on suppose qu'un rayon de lumière traverse successivement deux milieux séparés par un plan, et qu'on prenne un point fixe sur sa direction dans l'un de ces milieux, et un point fixe sur sa direction dans l'autre, la somme des produits des distances de ces points fixes à celui où le rayon passe d'un milieu dans l'autre, par les vîtesses de la lumière suivant les lignes qui mesurent ces distances, est un minimum entre toutes les sommes de produits formés de la même manière relativement à d'autres points du plan qui sépare les deux milieux.

Au moyen de ces deux principes, il devient aisé de démontrer le théorême énoncé pag. 235.

On prendra pour origine des coordonnées le point où le rayon de lumière passe d'un milieu dans l'autre, pour axe des z la perpendiculaire élevée à ce point sur le plan qui les sépare, et pour axes des x et des y deux droites perpendiculaires entr'elles prises à volonté dans ce plan. Alors les rapports $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ que nous avons nommés s et t seront les tangentes des angles que forment avec la normale à la surface réfringente, pour la première surface les projections du rayon réfracté sur les plans des xz et des yz, et pour la seconde celles du rayon incident correspondant, en sorte qu'en distinguant par des primes les lettres qui se rapportent à la seconde surface, on aura pour déterminer les points où les plans tangens rencontrent

l'axe des x et celui des y, ces valeurs :

$$\xi = -\frac{1}{\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{ds}}, \qquad \eta = -\frac{1}{\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dt}};$$

$$\xi' = -\frac{1}{\frac{1}{z'^2}\cdot\frac{dz'}{ds'}}, \qquad \eta' = -\frac{1}{\frac{1}{z'^2}\cdot\frac{dz'}{dt'}}.$$

Comme deux angles suffisent pour déterminer la direction d'une droite dans l'espace, il est évident que, de quelque manière que les vitesses de la lumière dans chaque milieu soit donnée en fonction des angles que la direction du rayon forme avec leurs axes dans le cas où ils sont cristallisés, on pourra toujours par les formules connues de la trigonométrie sphérique, exprimer ces vitesses par une fonction $\varphi(s, t)$ de s et t dans le milieu où entre le rayon, et par une fonction $\psi(s', t')$ dans celui dont il sort.

On trouvera aisément

$$z = \frac{1}{\varphi(s, t).\sqrt{1+s^2+t^2}},$$

$$z' = \frac{1}{\psi(s', t').\sqrt{1+s'^2+t'^2}}.$$

En nommant a et a' les perpendiculaires abaissées sur la surface réfringentes des deux points fixes, pris l'un sur le rayon réfracté et l'autre sur le rayon incident correspondant, on aura en vertu du principe de la moindre action :

$$d\left(a\varphi(s, t).\sqrt{1+s^2+t^2} + a'\psi(s', t').\sqrt{1+s'^2+t'^2}\right) = 0;$$

c'est-à-dire :

$$d\left(\frac{a}{z} + \frac{a'}{z'}\right) = 0.$$

Dans cette équation z est fonction des deux variables indépendantes s et t, et z' l'est des deux quantités s' et t', qui dépendent de s et t en vertu de deux relations qu'on obtient facilement, en nommant b et c les projections sur l'axe des x et sur celui des y de la distance des deux points fixes, ces relations sont :

$$as + a's' = b, \quad \text{et} \quad at + a't' = c,$$

qui donnent :

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{dt'}{dt} = -\frac{a}{a'}.$$

Mais comme l'équation

$$d\left(\frac{a}{z}+\frac{a'}{z'}\right)=0$$

doit avoir lieu séparément à l'égard des deux variables indépendantes s, t, on a

$$\frac{a}{z^2}\cdot\frac{dz}{ds}+\frac{a'}{z'^2}\cdot\frac{dz'}{ds'}\cdot\frac{ds'}{ds}=0,$$

et

$$\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dt}+\frac{1}{z'^2}\cdot\frac{dz'}{dt'}\cdot\frac{dt'}{dt}=0,$$

que les relations que nous venons de trouver changent en

$$\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{ds}=\frac{1}{z'^2}\cdot\frac{dz'}{ds'},$$

et

$$\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dt}=\frac{1}{z'^2}\cdot\frac{dz'}{dt'}.$$

Ces valeurs étant les dénominateurs de celles de ξ, ξ', η, η', dont les numérateurs sont tous égaux à -1, on en conclura $\xi=\xi'$ et $\eta=\eta'$. La première de ces équations montre que les deux plans tangens coupent au même point l'axe des x, et la seconde qu'ils coupent aussi au même point l'axe des y, leur commune intersection rencontre donc ces deux axes, et se trouve par conséquent toute entière dans le plan des xy. *C.Q.F.D.*

Lorsque les milieux ne sont pas cristallisés, la vîtesse y est la même dans toutes les directions, et les surfaces dont nous venons de parler deviennent par conséquent des sphères. En vertu du théorême qui vient d'être démontré, le rayon incident et le rayon réfracté se trouvent alors dans un plan perpendiculaire à la surface réfringente, et font avec la normale à cette surface des angles dont les sinus sont en raison inverse des vîtesses, conformément à la règle de Descartes. Nous ne suivrons pas l'auteur de ce Mémoire dans les autres conséquences qu'il tire du même théorême, soit pour trouver par une construction, dont celle de Huyghens relative au rayon extraordinaire est un cas particulier, la direction du rayon réfracté, quand on connaît celle du rayon incident; soit pour déterminer l'inclinaison sous laquelle la réfraction se change en réflexion, et la direction que prend dans ce dernier cas un rayon réfléchi extraordinairement. Il est bien facile de suppléer aux détails, dans lesquels nous pourrions entrer à cet égard.

Note sur la chaleur rayonnante; par M. Poisson.

(Lue à la Société Philomatique.)

M. Leslie a démontré, par des expériences très-ingénieuses, que les rayons calorifique partis d'un même point, pris sur la surface d'un corps échauffé, n'ont pas la même intensité dans tous les sens. L'intensité de chaque rayon, comme celle de toutes les émanations, décroît en raison inverse du carré des distances au point de départ; à distance égale, elle est la plus grande dans la direction normale à la surface; et, suivant M. Leslie, elle est proportionnelle pour tout autre rayon au cosinus de l'angle compris entre sa direction et cette normale. Cette loi conduit à une conséquence utile dans la théorie de la chaleur rayonnante, qui, je crois, n'a pas encore été remarquée. Il en résulte, en effet, que si l'on a un vase de forme quelconque, fermé de toutes parts, dont les parois intérieures soient partout à la même température et émettent par tous leurs points des quantités égales de chaleur, la somme des rayons calorifiques qui viendront se croiser en un même point du vase sera toujours la même, quelque part que ce point soit placé; de sorte qu'un thermomètre qu'on ferait mouvoir dans l'intérieur du vase, recevrait constamment la même quantité de chaleur, et marquerait partout la même température; ce que l'on peut regarder comme étant conforme à l'expérience. Cette égalité de température dans toute l'étendue du vase ne dépendant ni de sa forme, ni de ses dimensions, doit tenir à la loi même du rayonnement, et c'est ce que je me propose de prouver dans cette note.

Pour cela, appelons O un point fixe pris dans l'intérieur du vase; soit M un point quelconque de sa surface intérieure; tirons la droite OM, et, par le point M, menons intérieurement une normale à la surface. Désignons par α l'angle compris entre cette normale et la droite MO: si cet angle est aigu, le point O recevra un rayon de chaleur parti du point M; si, au contraire, il est obtus, le point O ne recevra aucun rayon du point M. Nous supposerons, pour simplifier, que le point O reçoit des rayons de tous les points du vase, c'est-à-dire, que l'angle α n'est obtus pour aucun d'eux: on verra sans difficulté comment il faudrait modifier la démonstration suivante, pour l'étendre au cas où une partie des parois du vase n'enverrait pas de rayons au point O. Soit a l'intensité du rayon normal, émis par le point M, à l'unité de distance; cette intensité, à la même distance et dans la direction MO, sera exprimée par $a \cos \alpha$, d'après la loi citée; et si nous représentons par r la longueur de la droite MO, nous aurons $\frac{a \cos \alpha}{r^2}$, pour l'in-

tensité de la chaleur reçue par le point O, suivant la direction MO. De plus, si nous prenons autour du point M une portion infiniment petite de la surface du vase, et si nous la désignons par ω, nous aurons de même $\frac{a\omega \cos \alpha}{r^2}$, pour la quantité de chaleur émise par cet élément ω et parvenue au point O. Or, on peut partager la surface du vase en une infinité d'élémens semblables; il ne reste donc plus qu'à faire, pour tous ces élémens, la somme des quantités telles que $\frac{a\omega \cos \alpha}{r^2}$, et l'on aura la quantité totale de chaleur reçue par le point O.

Cela posé, concevons un cône qui ait pour base l'élément ω, et son sommet au point O; décrivons de ce point comme centre et du rayon OM, une surface sphérique; et soit ω' la portion infiniment petite de cette surface interceptée par le cône. Les deux surfaces ω et ω' peuvent être regardées comme planes; la seconde est la projection de la première, et leur inclinaison mutuelle est égale à l'angle α, compris entre deux droites qui leur sont respectivement perpendiculaires; donc, en vertu d'un théorême connu, on aura $\omega' = \omega \cos \alpha$, et la quantité $\frac{a\omega \cos \alpha}{r^2}$ deviendra $\frac{a\omega'}{r^2}$. Décrivons une autre surface sphérique, du point O comme centre, et d'un rayon égal à l'unité; représentons par θ l'élément de cette surface intercepté par le cône qui répond aux élémens ω et ω'; en comparant ensemble θ et ω', qui sont deux portions semblables de surfaces sphériques, on aura $\omega' = r\theta$, et par conséquent

$$\frac{a\omega \cos \alpha}{r^2} = \frac{a\omega'}{r^2} = a\theta.$$

Maintenant, la quantité a est la même pour tous les points du vase, puisqu'on suppose qu'ils émettent tous des quantités égales de chaleur; il s'ensuit donc que la somme des produits tels que $a\theta$, étendue à toute la surface du vase, sera égale au facteur a multiplié par l'aire d'une sphère dont le rayon est pris pour unité. Donc, en appelant π le rapport de la circonférence au diamètre, et observant que 4π est l'aire de la sphère, nous aurons $4\pi a$ pour la quantité de chaleur qui arrive au point O; et l'on voit que cette quantité est indépendante de la position du point O, ce que nous voulions démontrer.

On peut aussi remarquer qu'elle ne dépend pas de la forme ni des dimensions du vase; d'où il résulte que si le vase est vide d'air, et qu'on vienne à en augmenter ou diminuer la capacité, la température marquée par un thermomètre intérieur demeurera toujours

la même; et c'est, en effet, ce que M. Gay-Lussac a vérifié par des expériences susceptibles de la plus grande précision. Ces expériences détruisent l'opinion d'un calorique propre au vide; elles montrent, en les rapprochant de ce qui précède, qu'il n'y a dans l'espace d'autre calorique que celui qui le traverse à l'état de chaleur rayonnante émise par les parois environnantes. Quand aux changemens de température qui se manifestent lorsqu'on augmente ou qu'on diminue tout-à-coup un espace rempli d'air, ils sont uniquement dus au changement de capacité calorifique que ce fluide éprouve par l'effet de la dilatation ou de la compression.

Si le point O, que nous avons considéré précédemment, était pris sur la surface intérieure du vase, la quantité de chaleur qu'il reçoit de tous les autres points de cette surface serait égale à la constante a multipliée par l'aire de la demi-sphère dont le rayon est un, et non pas par l'aire entière de cette sphère, comme dans le cas précédent. Ce produit $2\pi a$ est aussi égal à la somme des rayons calorifiques émis dans tous les sens par le point O; d'où il suit que chaque point des parois du vase émet à chaque instant une quantité de chaleur égale à celle qu'il reçoit de tous les autres points.

Généralement, si l'on veut connaître la quantité de chaleur envoyée à un point quelconque O par une portion déterminée des parois du vase, il faudra concevoir un cône qui ait son sommet en ce point, et pour circonférence de sa base le contour de la paroi donnée; puis décrire de ce même point comme centre, et d'un rayon égal à l'unité, une surface sphérique; la quantité demandée sera égale au facteur a multiplié par l'aire de la portion de surface sphérique interceptée par le cône. Ainsi toutes les fois que deux portions de surfaces rayonnantes, planes ou courbes, concaves ou convexes, seront comprises dans le même cône, à des distances différentes de son sommet, elles enverront à ce point des quantités égales de chaleur, si le facteur a est supposé le même pour tous les points des deux surfaces.

L'analogie qui existe entre la lumière et la chaleur rayonnante porte à croire que l'émission de la lumière doit se faire, comme plusieurs physiciens l'ont déja pensé, suivant la loi que M. Leslie a trouvée pour la chaleur rayonnante. Dans cette hypothèse, tout ce que nous venons de dire relativement à la chaleur s'appliquera également à la lumière, et la règle que nous venons d'énoncer sera aussi celle qu'on devra suivre en optique pour déterminer l'éclat d'un corps lumineux vu d'un point donné, ou, ce qui est la même chose, la quantité de lumière que ce corps envoie à l'œil de l'observateur.

Sur la nature des forces qui produisent la double réfraction; par M. Biot.

(Institut de France, janvier 1815.)

Lorsqu'un rayon de lumière pénètre dans un cristal dont la forme primitive n'est n'y l'octaèdre régulier, ni le cube, on observe en général qu'il se divise en deux faisceaux inégalement réfractés, l'un que l'on nomme *le faisceau ordinaire*, suit la loi de réfraction découverte par Descartes, et qui est commune à tous les corps cristallisés ou non cristallisés; l'autre suit une loi différente et plus compliquée; on le nomme *faisceau extraordinaire*.

Huyghens a déterminé cette dernière loi par observation, dans le carbonate de chaux rhomboïdal, vulgairement appelé *spath d'Islande*, et il l'a exprimée par une construction aussi ingénieuse qu'exacte. En combinant ce fait avec les principes généraux de la mécanique, comme Newton avait combiné les lois de Kepler avec la théorie des forces centrales, M. Laplace en a déduit l'expression génerale de la vîtesse des particules lumineuses qui composent le rayon extraordinaire. Cette expression indique qu'elles sont séparées des autres par une force émanée de l'axe du cristal, et qui, dans le spath d'Islande, se trouve être répulsive.

On croyait qu'il en était ainsi dans tous les autres cristaux doués de la double réfraction. Mais de nouvelles expériences m'ont fait découvrir que, dans un grand nombre de cristaux, le rayon extraordinaire est attiré vers l'axe au lieu d'être repoussé. De sorte que, sous le rapport de cette propriété, les cristaux doivent être partagés en deux classes, l'une que je nomme à double réfraction *attractive*, l'autre à *double réfraction répulsive*. Le spath d'Islande fait partie de cette dernière; le cristal de roche est compris dans l'autre. Du reste il m'a paru que la force, soit attractive, soit répulsive, émane toujours de l'axe du cristal, et suit toujours les mêmes lois; de sorte que les formules de M. Laplace s'y appliquent toujours.

Ce résultat montre qu'il existe dans l'action des cristaux sur la lumière, la même opposition de forces que l'on a déja reconnue dans plusieurs autres actions naturelles, comme les deux magnétismes et les deux électricités. C'est à quoi conduisent également les observations que j'ai publiées sur les mouvemens d'oscillation et de rotation des particules lumineuses, et sur les polarisations *quartzeuse* et *berillée*.

Extrait du rapport fait à la classe des sciences physiques de l'Institut de France, sur les travaux de l'année 1814; par M. Cuvier, *secrétaire perpétuel.*

L'une des plus curieuses substances dévoilées dans ces derniers tems est l'*iode*, cette matière si longtems cachée dans le varech, qui s'élève, par la chaleur, en une vapeur d'un beau violet, et qui, se comportant avec les autres corps d'une manière analogue à celle du chlore, ou de ce qu'on appelait ci-devant gaz muriatique oxigéné, a donné une nouvelle force aux idées que l'hydrogène sulfuré avait fait naître, et sur la voie desquelles on avait été remis par le chlore; idées qui tendent à introduire dans la théorie chimique cette modification importante, que l'oxigène n'est pas à beaucoup près le seul principe capable d'opérer l'acidification.

En effet, M. Bertholet avait montré, il y a plus de trente ans, que l'hydrogène sulfuré, où il n'entre point d'oxigène, a toutes les propriétés des acides, et les chimistes allemands avaient fort insisté sur ce fait pour combattre une partie de la théorie française. MM. Thenard et Gay-Lussac firent, au commencement de 1809, des expériences d'où il résultait qu'il était impossible d'extraire l'oxigène de ce qu'on appelle communément *acide muriatique oxigéné*, et que, pour continuer à croire qu'il y existe, il faut supposer que dans tous les cas où cet acide se convertit en acide muriatique ordinaire, il se forme de l'eau qui s'unit indissolublement à l'acide produit, ou du moins que les élémens de l'eau y entrent comme parties intégrantes; tandis qu'en regardant le soi-disant acide muriatique oxigéné comme une substance simple dont la combinaison avec l'hydrogène donnerait l'acide muriatique ordinaire, on est dispensé de cette supposition. Mais, tout en énonçant ces deux manières de voir, nos deux chimistes s'en tinrent à la première, qui était plus analogue à ce qui se passe dans le grand nombre des acidifications.

M. Davy, qui avait été conduit aux mêmes conclusions, mit plus de hardiesse dans son choix; il adopta décidément la deuxième théorie, et donna en conséquence à l'acide muriatique oxigéné un nom particulier, celui de *chlore*, duquel il dériva ceux des deux autres acides dans lesquels il entre. L'un (*le muriatique*), où il est en combinaison avec l'hydrogène, fut appelé *Hydrochlorique*; l'autre (*le muriatique suroxigéné*), qui résulte de sa combinaison avec l'oxigène, reçut le nom d'*acide chlorique*.

Bientôt les expériences sur l'acide nommé jusqu'ici *fluorique*,

donnèrent lieu de penser, et ce fut M. Ampère, nouvellement nommé membre de la section de Géométrie, qui eut le premier cette idée, que sa composition est analogue à celle de l'hydrochlorique, c'est-à-dire, qu'il est composé d'*hydrogène* et d'un corps simple d'une nature particulière, que l'on dut alors désigner par le nom de *fluore*.

Ainsi la propriété d'acidifier l'hydrogène ou de devenir acide par son moyen, fut reconnue admissible dans trois substances: le soufre, le chlore et le fluore. L'iode en est venu offrir une quatrième.

Nous avons dit, dans notre analyse des travaux de l'année dernière, que l'iode avait été découvert par M. Courtois. Cet habile fabricant paraît l'avoir obtenu dès la fin de 1811, mais il ne l'avait communiqué qu'à M. Clément, son ami, qui lui-même ne le fit connaître au public que vers la fin de 1812. Cependant ce retard fut bientôt réparé; et, en peu de jours, M. Gay-Lussac et M. Davy eurent constaté les principales propriétés de cette substance, et spécialement l'analogie suivie qu'elle présente avec le chlore, et les deux acides qu'elle forme comme le chlore avec l'oxigène et avec l'hydrogène. M. Davy présenta cette analogie comme un nouvel appui pour la théorie qu'il avait adoptée.

Depuis lors on s'est occupé de l'iode avec l'intérêt dont il est digne. M. Colin, répétiteur de chimie à l'école polytechnique, a examiné ses combinaisons avec le mercure et l'ammoniaque, et reconnu qu'il se forme de l'acide iodique ou une combinaison d'iode et d'oxigène, toutes les fois qu'on traite l'iode avec des oxides où l'oxigène est faiblement condensé. Il a bien expliqué la génération de la poudre fulminante d'iode, découverte, ainsi que l'iode lui-même, par M. Courtois. Le gaz ammoniacal est absorbé par l'iode, et forme avec lui un liquide visqueux, lequel, mis dans l'eau, change de nature : l'hydrogène d'une partie de l'ammoniaque forme, avec une partie de l'iode, de l'acide hydriodique, qui se combine avec le reste de l'alcali, et l'azote de cette première portion d'ammoniaque forme avec l'autre partie de l'iode, la poudre fulminante.

Le même, M. Colin, a travaillé avec M. Gauthier de Claubry à déterminer la manière dont l'iode se comporte avec les substances organiques. Ces deux jeunes chimistes ont constaté que les substances où l'oxigène et l'hydrogène sont dans les mêmes proportions que dans l'eau, se mêlent simplement à l'iode; que celles où il y a plus d'oxigène s'y combinent intimement; mais que ni les uns ni les autres ne l'altèrent tant qu'on n'emploie pas une chaleur capable de les décomposer; au contraire, celles où l'hydrogène abonde, convertissent l'iode en acide hydriodique, et il en arrive autant aux premières quand on les chauffe assez pour dégager leur hydrogène.

Ces expériences leur ont présenté plusieurs phénomènes curieux : un mélange d'iode et d'amidon trituré prend une couleur rouge, bleue ou noire, selon que l'iode y est plus abondant, etc.

Mais celui qui a travaillé sur l'iode avec le plus de soin et d'étendue, c'est notre confrère M. Gay-Lussac, dont l'ouvrage a été imprimé dans les Annales de chimie. Il y considère l'iode, lui-même, ainsi que ses combinaisons et celles de ses deux acides avec les divers corps, ou, ce que d'après les règles reçues de la nomenclature chimique, on devra nommer les *iodures*, les *iodates*, et les *hydriodates*. A l'occasion de l'iode, il revient sur le *chlore*, et donne plusieurs remarques nouvelles sur ses combinaisons, qui n'avaient pas toutes été appréciées avec justesse; puis, considérant l'acide prussique comme essentiellement formé d'azote, d'hydrogène et de carbone, il conclut que l'azote doit aussi être ajouté à la liste des substances qui peuvent produire des acides sans oxigène, ce qui l'amène à regarder l'acidité et l'alcalinité comme des propriétés intrinsèques de certains corps et de certaines combinaisons, sans rapport nécessaire avec leur composition, tels que nous pouvons les découvrir, et ce qui le rapproche par conséquent des idées de Winterl et de quelques chimistes allemands. Ce Mémoire est rempli, d'ailleurs, de recherches délicates et d'indications ingénieuses, dont il ne nous est pas possible de rendre compte, mais qui ne manqueront pas de donner un nouvel essor à la partie de la chimie la plus profonde et la plus importante.

Sur un mode particulier de polarisation ; par M. Biot.

En étudiant l'action de la tourmaline sur la lumière, M. Biot y a reconnu la singulière propriété d'avoir la double réfraction ; quand elle est mince, et la réfraction simple, quand elle est épaisse. Pour mettre les phénomènes en évidence, il a fait passer les faces inclinées d'une grosse tourmaline, de manière a en former un prisme, dont le tranchant fut parallèle à l'axe de l'aiguille, qui est aussi celui du rhomboïde primitif. Si l'on regarde la flamme d'une bougie à travers ce prisme, en dirigeant le rayon visuel dans la partie la plus mince, on voit deux images d'un éclat sensiblement égal, dont l'une ordinaire, est polarisée dans le sens de l'axe de la tourmaline, et la seconde extraordinaire, l'est dans un sens perpendiculaire à cet axe. Mais à mesure que l'on ramène le rayon visuel dans la partie du prisme la plus épaisse, l'image ordinaire s'affaiblit, et enfin elle disparaît entièrement ; tandis que l'image extraordinaire continue à se transmettre, sans éprouver d'autre diminution de densité que celle qui provient de l'absorption. (Ce dernier article fait partie du rapport de M. Delambre, sur les sciences mathématiques.)

Sujet du Prix de physique, proposé par l'Institut, consistant en une médaille d'or de 3000 fr.

« Déterminer, 1°. la marche du thermomètre à mercure, au
« moins depuis zéro jusqu'à 200° centigrades ; 2°. la loi du refroi-
« dissement dans le vide ; 3°. les lois du refroidissement dans l'air,
« le gaz hydrogène et le gaz acide carbonique, à différens degrés
« de température et pour différens états de raréfaction. »

Le résultat du concours sera publié le 1er. lundi de janvier 1817.

IV. ANNONCE D'OUVRAGES NOUVEAUX.

Journal de l'Ecole Polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cette Ecole, tome X, ou 17me. cahier. 1 vol. in-4°. de 636 pages, 8 planches. Paris 1815.

Traité de chimie élémentaire, théorique et pratique; par M. *Thenard*, tome III. 1 vol. in-8°. de 638 pages.

Recherches expérimentales et mathématiques sur le mouvement des molécules de la lumière autour de leur centre de gravité, années 1812 et 1813; par M. *Biot*. 1 vol. in-4°.

Description des catacombes de Paris; par M. *Héricart de Thury*, ingénieur en chef au corps des Mines, inspecteur général des travaux souterrains du département de la Seine. 1 vol. in-8°., avec 8 planches.

Recherches expérimentales sur les propriétés physiques du sang; par M. *John Davy*, frère du célèbre chimiste de ce nom.

Les principaux résultats de ces recherches sont :

1°. Le sang artériel et le sang veineux ont à-peu-près la même capacité pour le calorique ;

2°. La température des différentes parties du corps est d'autant plus basse qu'elles sont plus éloignées du cœur ;

3°. Le sang de la femme est un peu plus léger que celui de l'homme ;

4°. La densité des particules rouges du sang est à-peu-près 1130, celle de l'eau étant 1000.

Exercices de calcul intégral ; par M. *Legendre*. 1 vol. in-4°.

1re. Partie. Des fonctions elliptiques.
2e. Partie. Des intégrales Eulériennes.
3e. Partie. Des quadratures.
Supplément de la première partie.
4e. Partie divisée en deux sections, dont l'objet est de compléter la 2me. et la 3me. partie.

Essai philosophique sur les probabilités (*) ; par M. *Laplace*, 2e. édition, 1 vol. in-8°. Paris 1814.

§. V. PERSONNEL.

Promotions d'anciens élèves de l'Ecole Polytechnique.

ARTILLERIE.

Au 1er. février.

Nombre total d'officiers supérieurs d'artillerie, sortis de l'Eco'e Polytechnique.

1 Maréchal de camp ; 7 Colonels ; 11 Majors ; 71 Chefs de bataillon.

Colonels.

MM. St.-Cyr.
Bernard.
Gourgault.
Boileau.

MM. D'Haupoult.
Leclerc.
Pailhou.

(*) Se vend 3 fr., chez Mme. Ve. Courcier, quai des Augustins, n°. 57. On trouve chez le même libraire, les ouvrages suivans du même auteur :
1°. Théorie des probabilités. 1 vol. in-4°., 2e. édition. Paris 1814, prix 18 fr. ;
2°. Traité de Mécanique céleste. 4 vol. in-4°. Prix 66 fr. ;
3°. Système du monde, 4e. édition, avec le portrait de l'auteur. 1 vol. in-4°. Prix 15 fr., ou 2 vol. in-8°. Prix 12 fr.

Ce dernier ouvrage autant estimé par les hommes de lettres que par les savans, est le plus beau monument qu'on puisse élever à la gloire de l'esprit humain. Non-seulement il apprend, comme son titre l'annonce, l'état actuel de la science la plus étendue, l'astronomie ; il présente encore le tableau des connaissances physiques qui se lient au système général du monde, et dont l'explication dépend de la théorie des forces attractives. Heureux les jeunes gens, assez instruits dans la géométrie et l'analyse, pour démontrer les vérités que ce livre renferme : ceux là seuls ont le sentiment des vrais rapports de l'homme avec la nature.

Majors.

MM. Aubert.
Pache.
Lefrançais.
Abeille.
Duchamp.
Bitsch (Auguste).
MM. Durbach.
Évain (Auguste).
Etchegoyen.
Lasnon.
Brechtel.

GÉNIE MILITAIRE.

Au 1er. mars.

Suite des états donnés précédemment. (*Voyez* pag. 97 de ce vol.)

1 Maréchal de camp, M. Bernard; 1 colonel, M. Paulin; 4 majors, MM. Rohault de Fleury, Cournault, Foucauld (Jules), Durivau (14 avril 1815). 14 nouveaux chefs de bataillon.

INSTRUCTION PUBLIQUE.

M. Petit, instituteur adjoint de physique, à l'Ecole Polytechnique.

M. Lavit (auteur d'un traité de perspective, en 2 vol. in-4°., avec 110 pl.), professeur de mathématiques à l'Ecole d'architecture, en remplacement de M. Mauduit.

M. Chezy, professeur de sanscrit au collége de France.

M. Sedillot, adjoint du bureau des longitudes, pour l'histoire de l'astronomie chez les Orientaux.

CONCOURS DE 1814.

EXAMINATEURS POUR L'ADMISSION DANS LES SERVICES PUBLICS.

Analyse; *Mécanique*.......	MM. Legendre, Lacroix, *examinateurs permanens.*
Géométrie descriptive; *Analyse appliquée à la géométrie.*	M. Binet (J.-P.-M.).
Physique et Chimie............	M. Dulong.

EXAMINATEURS POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Paris.............	M. Labey.
Tournée du Sud.........	M. Francoeur.
Tournée du Nord.........	M. Dinet.

Les examens ont été ouverts le 1er. août, et les cours pour la deuxième division formée par la nouvelle promotion, ont commencé le 2 novembre.

Le Jury d'admission a prononcé, le 3 octobre 1814, sur les candidats qui se sont présentés au concours de cette année.

214 candidats ont été examinés,

SAVOIR :

A Paris.	77	214.
Dans les départemens.	137	

Sur ce nombre 155 ont été jugés admissibles,

SAVOIR :

De l'examen de Paris.	50	155.
Des départemens.	105	

Le nombre des candidats admis à l'Ecole, par suite de la décision du Jury, a été de 69,

SAVOIR :

De Paris.	23	69.
Des départemens.	46	

Nombre des élèves admis à l'Ecole depuis son établissement . . . . 3095.

SAVOIR :

De Paris.	1472	3095.
Des départemens.	1623	

Nombre des candidats examinés depuis l'établissement de l'Ecole. . . . . 7229.

SAVOIR :

De Paris.	3223	7229.
Des départemens	4006	

LISTE,

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE,

Des Élèves admis à l'Ecole Polytechnique, par suite de la décision du Jury, du 3 octobre 1814.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Allenet.	Charles-Ferdinand.	St-Jean-d'Angely.	Char.-Inférieure.
Arnauldet.	Sidrach-Elicio.	Niort.	Deux-Sèvres.
Arvet.	Louis-Frédér.-Edouard.	Grenoble.	Isère.
Avril.	Sophie-Emilie-Philippe.	Caen.	Calvados.
Bach.	Etienne-Mathias-Gauderique.	Perpignan.	Pyrén. Orientales.
Bertrand.	Alexandre-Jacq.-Franç.	Rennes.	Ille-et-Vilaine.
Beudin.	Jacques-Félix.	Paris.	Seine.
Blondat.	Jean-Baptiste-Gabriel.	Troyes.	Aube.
Born.	Jean-Pierre.	Aynac.	Lot.
Bouché.	Alexandre.	Paris	Seine.
Carron.	Charles-Alphonse.	Saint-Vallery.	Somme.
Caut.	Maurice.	Paris.	Seine.
Chevalier.	Hervé-Arsène-Pierre.	Cherbourg.	Manche.
Cochard.	Casimir-Ovide-Prosper.	Sainte-Colombe-lez-Vienne.	Rhône.
Comte.	Isidore-Aug.-Marie-François-Xavier.	Montpellier.	Hérault.
Courant.	Adolphe.	Lisieux.	Calvados.
Démiau.	Casimir-Hyp.-Emman.	Thil.	Haute-Garonne.
Denis.	Paul-Camille.	Montier-en-Der.	Haute-Marne.
Desages.	Henri.	Hambourg.	....
Descolins.	Nicolas.	Vesoul.	Haute-Saône.
Desruelles.	Etienne-Alexandre.	Saint-Venant.	Pas-de Calais.
Duflos (le Dicte).	Charles-Constant-Léopold-Marie.	Gournay.	Seine-Inférieure.
Duhamel.	Jean-Marie-Constant.	Saint-Malo.	Ille-et-Vilaine.
Fauché-Prunelle.	André-Alexandre.	Grenoble.	Isère.
Féraudy.	Jacques-Honoré.	Marseille.	Bouc.-du-Rhône.
Ferris.	Richard-Maurice.	Londres.	....
Fouache.	Ernest.	Pomera-Grenas.	Pas-de-Calais.
Galy-Cazalat.	Antoine.	Saint-Girons.	Ariège.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Gartempe (Voysin de).	Philippe-Gustave.	Gueret.	Creuse.
Géhard.	Auguste.	Evron.	Mayenne.
Genest.	Thomas-Clément.	Tours.	Indre-et-Loire.
Gengembre.	Camille.	Paris.	Seine.
Girod.	Frédéric.	Morez.	Jura.
Gondinet.	François-Candide.	Saint-Yrieix.	Haute-Vienne.
Goust.	Edme-Bonet.	Paris.	Seine.
Goyer.	Pierre.	La Chapelle Moche.	Mayenne.
Granier.	André-Marie.	Montpellier.	Hérault.
Guichard.	Jean-Baptiste.	Bercy.	Seine.
Lamé.	Gabriel.	Tours.	Indre-et-Loire.
Latouche (Nouel).	Alex.-François-Marie.	Saint-Brieuc de Mauron.	Morhihan.
Latour.	François-Frédéric.	L'Herm.	Ariège.
Lebozec.	Auguste-Charles.	Morlaix.	Finistère.
Le Moyne.	Nicolas-René-Desiré.	Metz.	Moselle.
Létourneau.	Bélair.	Angoulême.	Charente.
Levavasseur.	Adolphe-Pierre-Louis.	Rouen.	Seine-Inférieure.
Marey.	Guillaume-Stanislas.	Nuits.	Côte-d'Or.
Martin.	Claude-Eugène.	Marseille.	Bouc.-du-Rhône.
Mayniel.	Emile.	Toulouse.	Haute-Garonne.
Médous.	Jean-Antoine-Marcelin.	Toulouse.	Haute-Garonne.
Mellet.	François-Noel.	Lodève.	Hérault.
Meyssonnier.	Dominique-Benoît-Alp.	Tain.	Drôme.
Monnet.	François.	Dijon.	Côte-d'Or.
Mordret.	Victor.	Evreux.	Eure.
Nivard.	Silex.	Sauzé-Vaussay.	Deux-Sèvres.
Petit.	Aimé-François.	Paris.	Seine.
Poittevin.	Pierre-Yves-Olimpe.	Metz.	Moselle.
Pouzolz.	Jean-Auguste.	Montignac.	Dordogne.
Privezac (Le Brunet de).	Auguste.	Pagas.	Aveyron.
Regnard-Roux.	Charles-Franç.-Bernard.	Autun.	Saône et Loire.
Rocher.	André-Martial.	Paris.	Seine.
Savy.	Pierre.	Ségonzac.	Dordogne.
Servier.	Aristide-Camille.	Paris.	Seine.
Tiremois.	Jacques.	Bischwiller.	Bas Rhin.
Tourret.	Charles-Gilbert.	Montmarault.	Allier.
Toussaint.	Jean-Baptiste.	Mézières.	Ardennes.
Viader.	Louis.	Ille.	Pyrén. Orientales.
Vial.	Claude-Marie.	Lyon.	Rhône.
Woisard.	Jean-Louis.	Metz.	Moselle.
Zhendre.	Mathias-Jean-Aristide.	Paris.	Seine.

ADMISSION DANS LES SERVICES PUBLICS.

Listes, par ordre de mérite, des élèves admis dans les services publics, pendant l'année 1814.

ARTILLERIE DE TERRE.

MM.

1 Le Corbeiller.
2 Fabre (Augustin).
3 Johanys.
4 De Beauvais.
5 Duviquet.
6 Céas.
7 Bernard-Chambinière.
8 Michaud.
9 Chapelié.
10 Dalbiat.
11 Surdey.
12 Bert.
13 Reverdit.
14 Villemain.
15 Bruneau.
16 Hoart.
17 Guy (Pierre-Gabriel).
18 Chausson.
19 Métais.
20 Séré.

MM.

21 Martin (Franç.-Marie-Emile).
22 Pradal.
23 Geneix.
24 Burnier.
25 Blanq Desiles.
26 Ladevêse.
27 Imbert St.-Brice (P.-A.-J.).
28 Cicille.
29 Boisson.
30 Viollette.
31 Gacon.
32 Delaroche.
33 Delamare.
34 Godebert.
35 Forfait.
36 David.
37 Noël (A.-F.-P.).
38 Dauche.
39 Guillery.

GÉNIE MILITAIRE.

MM.

1 Bauchetet.
2 Lallemand de Cullion.
3 Lebas.
4 Delmas.
5 Carnot.

MM.

6 Creuly.
7 Moly.
8 Duvivier.
9 Couillerot Descharrieres.
10 Coignet.

PONTS ET CHAUSSÉES.

MM.

1 Petit (Jean-Jacques).
2 Reibell.

M.

3 Watbled.

PLACES DIVERSES.

MM. Conscience..... Passé à l'Ecole normale.
Wetzell........ Professeur d'hydrographie à l'Ile de France.
Petit (Joseph).. Géomètre arpenteur à l'Ile de France.

SOUS-LIEUTENANT DANS LA LIGNE.

M. Miollis.

LÉGION D'HONNEUR.

Les Elèves de l'Ecole Polytechnique ont passé le 27 mars 1815, à la revue de l'Empereur. S. M. voulant leur témoigner sa satisfaction sur le dévouement qu'ils ont montré le 30 mars 1814, en défendant la capitale, a accordé la décoration de la légion d'honneur à deux Elèves, MM. Houeau et Bonneton.

S. M. a confirmé en outre la promotion faite précédemment pour le même objet, en faveur de MM. Petit (Jean-Jacques), Lallemand de Cullion, et Malpassuti.

ETAT de situation des élèves de l'Ecole Polytechnique, à l'époque du 1er. janvier 1815.

L'Ecole était composée, au 1er. janvier 1814, de... 336 Elèves.
Elle a perdu pendant l'année 1814,

SAVOIR :

Admis dans les services publics.

Artillerie de terre.	39	56	154
Génie militaire	10		
Ponts et chaussées	3		
Nommés sous-lieutenans dans la ligne. .	1		
Places diverses.	3		
Démissionnaires	96	98	
Mort	2		
Il restait.			182
Elèves admis à l'Ecole, à dater du 1er. novembre 1814 .			69

TOTAL des élèves composant l'Ecole Polytechnique, au 1er. janvier 1815. . . . . 251 Elèves.

SAVOIR :

Première division	131	251
Deuxième division.	120	

§. VI. ACTE DU GOUVERNEMENT.

Décret du 1er. *mai* 1815. — Les élèves de l'Administration des Poudres et Salpêtres seront pris exclusivement parmi les élèves de l'Ecole Polythecnique, au concours, et ainsi qu'il est réglé pour les autres services publics, par la loi du 25 frimaire an 8.

ERRATA du volume III, 1er. *et* 2e. *cahiers*.

Premier cahier, page 1 — 110.

Page 37,	ligne 2,	après *edc*, fermez la parenthèse.
42,	21,	apparente, *lisez :* apparentes.
53,	6,	supprimez le mot *situés*.
55,	13,	neuvième, *lisez :* n^{eme}.
Id.	15,	telles, *lisez :* telle.
Id.	20,	cercle A, *lisez :* cercle.
56,	14,	rayon φB, *lisez :* rayon dB.
Id.	30,	d'un arc Aa, la droite As, *lisez :* d'un arc Ba, la droite Hs.
61,	7,	*supprimez :* demi.
Id.	14,	$\sin \frac{1}{2} c$, *lisez :* $\cos \frac{1}{2} c$.
62,	12,	$- \frac{1}{2} \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} b \sin^2 C$, *lisez :* $- \frac{1}{2} \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} b \sin^2 C$.
63,	18,	$4 \sin \frac{1}{2}$, *lisez :* $4 \sin \frac{1}{2} s$.

Deuxième cahier, page 111 — 258.

145,	4,	*osculateurs*, lisez : *de courbure*.
167,	21,	$\sqrt{4s^2 + (r+t)^2}$, *lisez :* $\sqrt{4s^2 + (r-t)^2}$.
189,	9,	au lieu de $-A_2 A_2 Am^2)z^4+$, *lisez :* $-A'_2 A_2 m^2 - A_4)z^4-$.
201,	29,	32 et 35, au lieu de A', *lisez :* A.
202,		troisième alinea, au lieu de cadre $KLMN$, *lisez :* cadre $PQRS$.

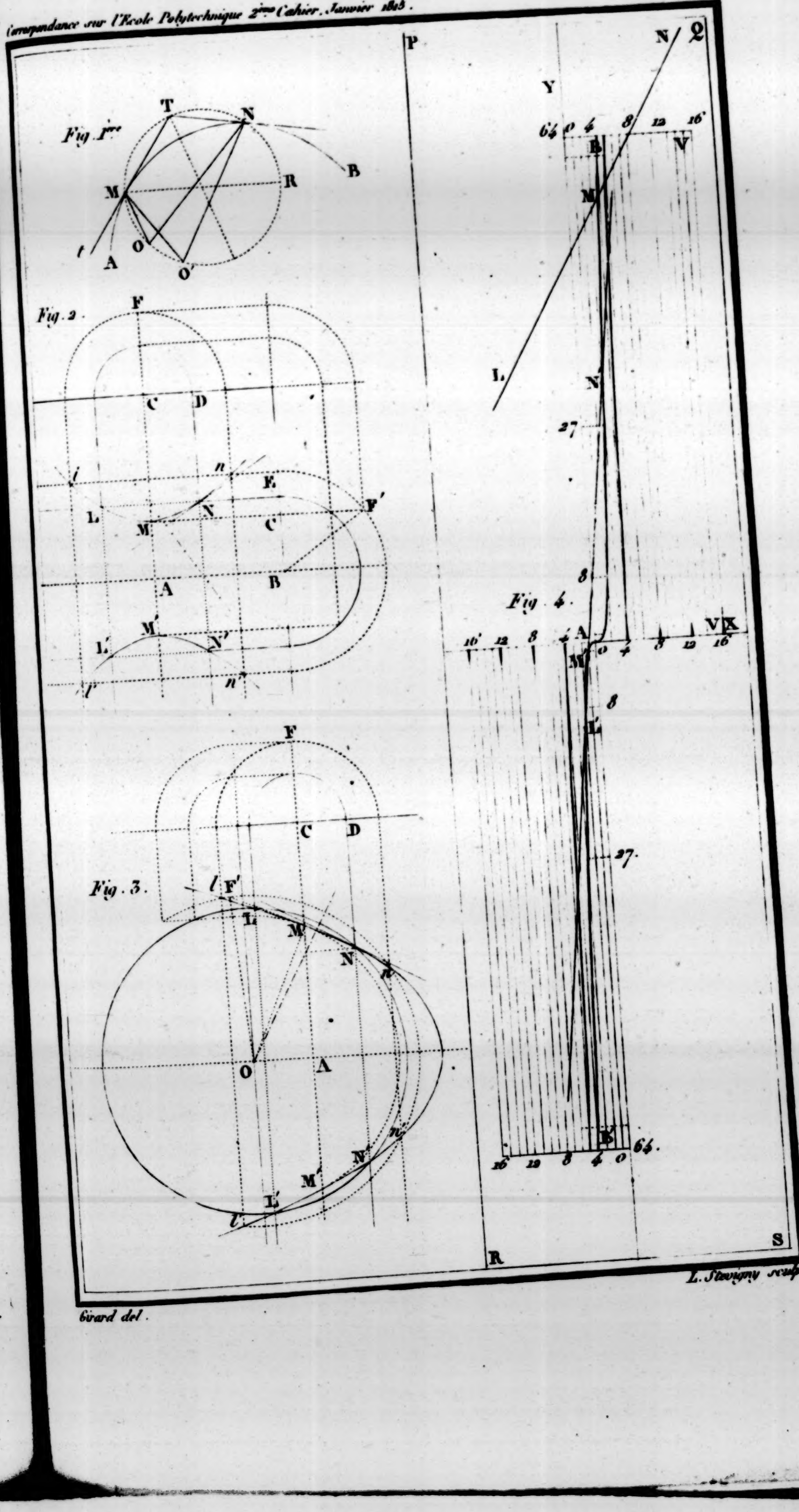
SUITE DE LA TABLE DES MATIÈRES

Du volume III.

Table du 2°. cahier.

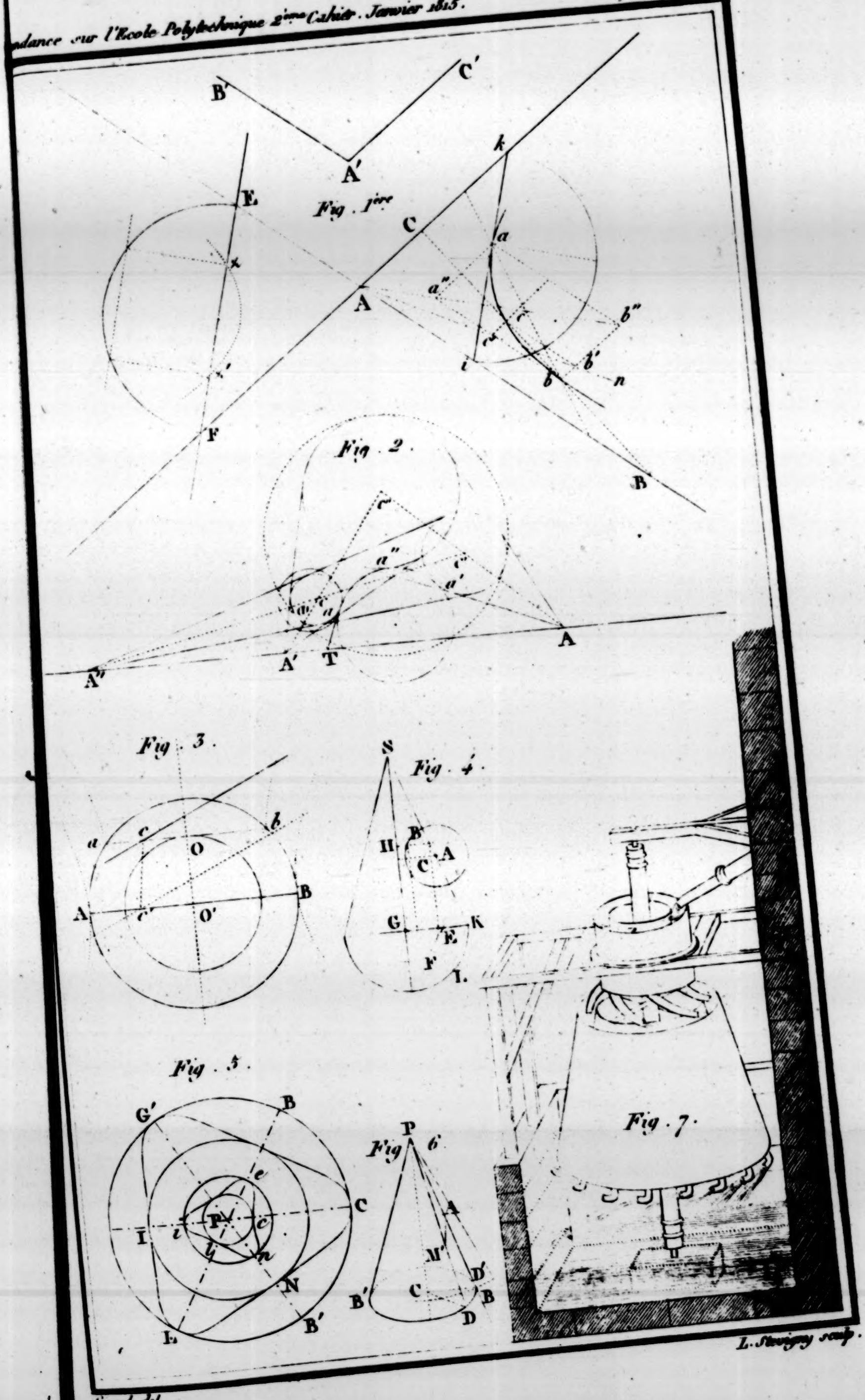
§. I^{er}. Analyse. — Géométrie.

Fin de la Table.



Girard del.

L. Sturigny sculp.



Girard del. L. Sixdeniers sculp.